

АВТОНОМНАЯ НЕКОММЕРЧЕСКАЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ  
«ФИЗТЕХ-ЛИЦЕЙ» ИМ. П. Л. КАПИЦЫ

НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

«Старт в инновации»

Влияние изменения коэффициента трения на предметы

Авторы:

Ражабов Владислав

7А

Руководители:

Ким Зыонг Куокович, студент МФТИ(НИУ)

г. Долгопрудный, МО

2020

1

## **СОДЕРЖАНИЕ**

Введение.....	3
Создание модели .....	4
Сравнение модели с начальным вариантом .....	6
Траектории движения центра масс .....	8
Сравнение теории и практики .....	10
Заключение .....	11
Список используемой литературы .....	12
Приложение .....	13

## ВВЕДЕНИЕ

### Игрушечные машинки на треке и виды существующего трения.

Все мы неоднократно видели игрушечные треки с гоночными машинками, которыми желал обладать каждый мальчик. У меня дома стоит такой набор. Из него можно сделать дорожку любого вида и формы, чем я однажды и занимался в свободное время. Сконструировав гоночный трамплин в форме полукруга, я запускал машинку. В голове у меня возник вопрос: «Можно ли закрепить машинку на определенной высоте так, чтоб она не могла сдвинуться с места?». После этого я начал изучать литературу о том, почему тела вообще перемещаются и какой параметр на это влияет. Оказалось, что сила трения, возникающая при соприкосновении двух объектов, регулирует движение их друг относительно друга.

Самые первые начальные исследования о силе трения проводились еще в конце XV века Леонардо да Винчи. Все мы, начиная с седьмого класса, знаем о законе трения, который открыли французские ученые Гийом Амонтон и Шарль Кулон:

$$F_{\text{трения}} = \mu N$$

где  $\mu$  – коэффициент трения между поверхностями,  $N$  – сила реакции опоры.

За счет силы трения и этого закона работает множество механизмов в жизни и науке, например, вращение обычных зубчатых шестеренок, колебание струн скрипки или же сцепление колеса с дорогой в гололед. Но что такое сила трения и какова ее природа? Сила трения появляется за счет деформации тел и соприкосновения их друг с другом. Она зависит, в основном, от характеристик соприкасающихся поверхностей, но это не единственный критерий.

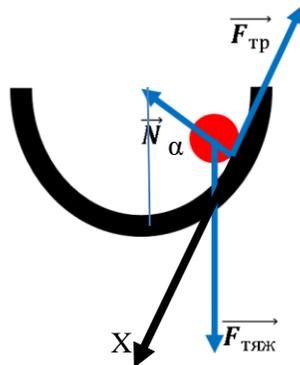
Существует деление силы трения на три типа:

- Сила трения покоя (она возникает при отсутствии движения тел)
- Сила трения скольжения (она возникает при движении тел)
- Сила трения покоя (она возникает при качении одного тела по другому)

## ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ

**Описание сил, действующих на тело, находящееся на круговой траектории. Модель движения тела при различных начальных условиях. Влияние силы трения на возникающие колебания.**

Рассмотрим траекторию движения машинки по полуокружности. Для упрощения модели заменим машинку на маленький резиновый шарик. Расставим силы, действующие на тело в некоторый момент времени:



$F_{\text{тяж}}$  – сила тяжести, направленная вертикально вниз,  $N$  – сила реакции опоры, направленная перпендикулярно касательной в точке касания шара и полуокружности,  $F_{\text{тр}}$  – сила трения скольжения, направленная по касательной в точке касания шара и полуокружности. Сила трения всегда направлена в противоположную сторону от предполагаемого движения тела, и, в зависимости от направления движения шара (поднимается вверх или опускается вниз), сила трения направлена в разные стороны.

Запишем второй закон Ньютона для этой системы:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{тяж}} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}$$

Обозначим за угол отклонения от вертикали угол  $\alpha$ .

Заметим аналогию с математическим маятником – движение происходит по полуокружности (при угле отклонения от вертикали меньшем, чем 45 градусов). В нашем случае, в качестве силы сопротивления и причины потери энергии выступает сила трения.

Рассмотрим тогда полуокружность радиуса  $R$ , по которой катится шарик массы  $m$ . Тогда запишем второй закон Ньютона в проекции на ось  $Ox$ :

$$ma = -F_{\text{тр}} + mg \sin \alpha$$

Вспомним о том, что  $a = \ddot{\alpha}$  (скорость изменения скорости изменения угла отклонения от вертикали).

Тогда запишем чуть в другом виде:

$$m\ddot{\alpha} + F_{\text{тр}} - mg \sin(\alpha) = 0$$

$$F_{\text{тр}} = \mu N$$

$$N = F_T \cdot \sin(\alpha)$$

Итоговый вид уравнения колебаний:

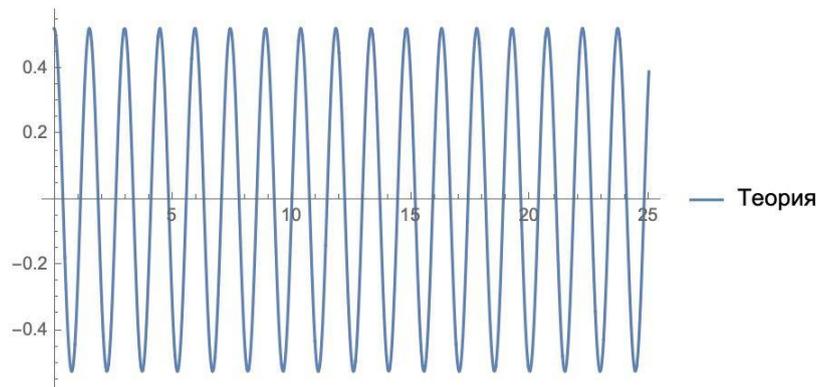
$$\ddot{\alpha} + g \sin(\alpha) \cdot (\mu - 1) = 0$$

Как мы видим, колебания зависят от коэффициента трения между поверхностями шарика и трека. Осталось поставить эксперимент и сравнить теорию с практикой.

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАВИСИМОСТИ

### Метод измерения зависимости времени колебания от времени полной остановки. Анализ данных.

Теоретический график представляет собой растянутую синусоиду, что совершенно не соответствует реальности, ведь в таком случае мячик бы никогда не останавливался в нижней точке, но это неоднократно происходит. Этому есть объяснение – в уравнении траектории движения не было учета изменения силы сопротивления (в нашем случае силы трения) от времени.



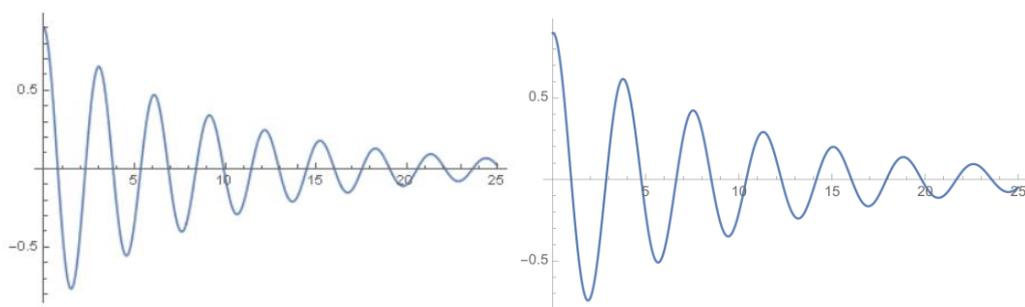
В этот момент стоит обратить внимание на то, что коэффициент трения изменяется в зависимости от скорости движения шарика. Это можно объяснить так: когда тела медленно проезжают друг по другу, то шероховатости и неровности одного попадают на шероховатости другого, как в пазы, но когда скорость большая, то неровности проскакивают друг друга, так и не зацепившись. Добавим в уравнение зависимость коэффициента трения от скорости движения для таких материалов, как резина и пластик (предположим, что зависимость линейна). Решим численно уравнение в программе Wolfram Mathematica.

$$\ddot{\alpha} + g \sin(\alpha) \cdot (\mu(v) - 1) = 0$$

$$v = R\dot{\alpha}$$

$$\ddot{\alpha} + g \sin(\alpha) \cdot (\mu(R\dot{\alpha}) - 1) = 0$$

Для каждого исходных данных снимем график движения по координате OX в программе Tracker и воспроизведем траекторию движения. Ниже представлены графики зависимости координаты по оси OX (метры) от времени (секунды).



Из изменений начального коэффициента трения в экспериментах, мы выяснили, что его увеличение приводит к уменьшению амплитуды колебаний и уменьшению времени их

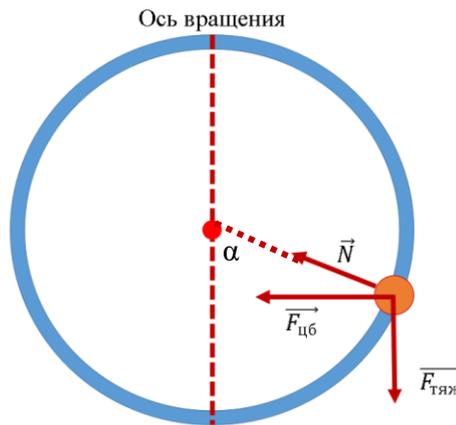
остановки. Но только уменьшения амплитуды недостаточно, потому что сколько бы мы не увеличивали начальный коэффициент трения, все равно это было недостаточно для того, чтобы остановить машинку в определенном месте. Тогда было решено, что нужно внедрять действие еще одной силы, но на предмет на треке она не должна явно действовать (очевидно, что если мы приклеим машинку к трассе, то она не сможет сдвинуться с места). Выход был найден в раскручивании самого трека.

## ОПИСАНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ПРЕДМЕТА ПРИ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ТРАЕКТОРИИ.

### Объяснение остановки предмета на определенной высоте.

Для модели заменим машинку на шарик, а трек на кольцо круглой формы. Наденем шарик на кольцо для того, чтобы избежать влияние трения качения, которое существует при соприкосновении вращающегося тела с телом, которое движется поступательно или стоит.

Если закрутить это кольцо, с надетым на него шариком, который может без затруднений перемещаться по окружности, то возникнет центробежная сила, направленная перпендикулярно оси вращения из точки нахождения шарика:



Отсюда можем составить уравнение для II закона Ньютона. Рассмотрим силы, действующие на шарик, в системе отсчета, связанной с землей: сила тяжести и сила реакции опоры, направленная к центру окружности:

$$m\vec{a}_{цб} = \vec{F}_{тяж} + \vec{N} + \vec{F}_{тр}$$

В проекции на ось OX:  $ma_{цб} = N \sin(\alpha) - \cos \alpha F_{тр}$

В проекции на ось OY:  $mg = N \cos(\alpha) + \sin \alpha F_{тр} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} N(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) &= mg \\ N(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) &= ma_{цб} \end{aligned}$$

Выразим из двух уравнений силу реакции опоры, приравняем и сократим на m:

$$\frac{g}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} = \frac{a}{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}$$

Перемножим:

$$g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha = a_{цб} \cos \alpha + a_{цб} \mu \sin \alpha$$

Сгруппируем:

$$\sin \alpha (g - a_{цб} \mu) = \cos \alpha (\mu g + a_{цб})$$

Отсюда:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{a_{цб} + \mu g}{g - a_{цб} \mu}$$

Вспомним о том, что ускорение можно выразить через угловую скорость и радиус вращения:

$$a = \omega^2 r$$

Радиус вращения можно выразить через общий радиус и угол отклонения от вертикали:

$$r = R \cdot \sin(\alpha)$$

Подставим выражение для ускорения, радиуса и проекцию второго закона Ньютона на ось ОУ в проекцию второго закона Ньютона на ось ОХ:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\omega^2 R \cdot \sin(\alpha) + \mu g}{g - \omega^2 R \cdot \sin(\alpha) \mu}$$

Распишем геометрический смысл тангенса ( $h$  – высота подъема шарика) и приравняем к полученному уравнению из вторых законов Ньютона:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{R \sin(\alpha)}{R - h}$$

$$\frac{R \sin(\alpha)}{R - h} = \frac{\omega^2 R \cdot \sin(\alpha) + \mu g}{g - \omega^2 R \cdot \sin(\alpha) \mu}$$

$$\frac{(g - \omega^2 R \sin(\alpha) \mu) R \sin(\alpha)}{\omega^2 R \sin(\alpha) + \mu g} = R - h$$

$$R - \frac{(g - \omega^2 R \sin(\alpha) \mu) R \sin(\alpha)}{\omega^2 R \sin(\alpha) + \mu g} = h$$

Мы получили зависимость высоты подъема от угла отклонения, угловой скорости вращения и радиуса. Осталось разобраться с синусом:

$$\cos \alpha = \frac{R - h}{R}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{R - h}{R}\right)^2}$$

$$R - h = \frac{\left(g - \omega^2 R \mu \sqrt{1 - \left(\frac{R - h}{R}\right)^2}\right) R \sqrt{1 - \left(\frac{R - h}{R}\right)^2}}{\omega^2 R \sqrt{1 - \left(\frac{R - h}{R}\right)^2} + \mu g}$$

Теперь мы имеем зависимость только от радиуса, начального коэффициента трения и угловой

скорости. Изменяя эти параметры для каждой ситуации, мы можем предсказать высоту подъема шарика или любого другого предмета.

## ИЗГОТОВЛЕНИЕ МОДЕЛИ

### Детали экспериментальной установки. Отслеживание положения центра масс в зависимости от времени

Конструкция состоит из круглого обруча, на который надета бусина. Обруч раскручивается вручную, одновременно с этим ведется съемка для фиксации как угловой скорости вращения обруча в данный момент, так и высоты подъема предмета. Результаты обрабатывались в программе Tracker. С ее помощью можно покадрово смотреть изменение высоты и будут заметны даже малейшие изменения в положении предмета. Решение уравнения было доверено программе Wolfram Mathematica. Для каждого из случаев выставлялись параметры эксперимента, такие как радиус, угловая скорость вращения и начальный коэффициент трения.

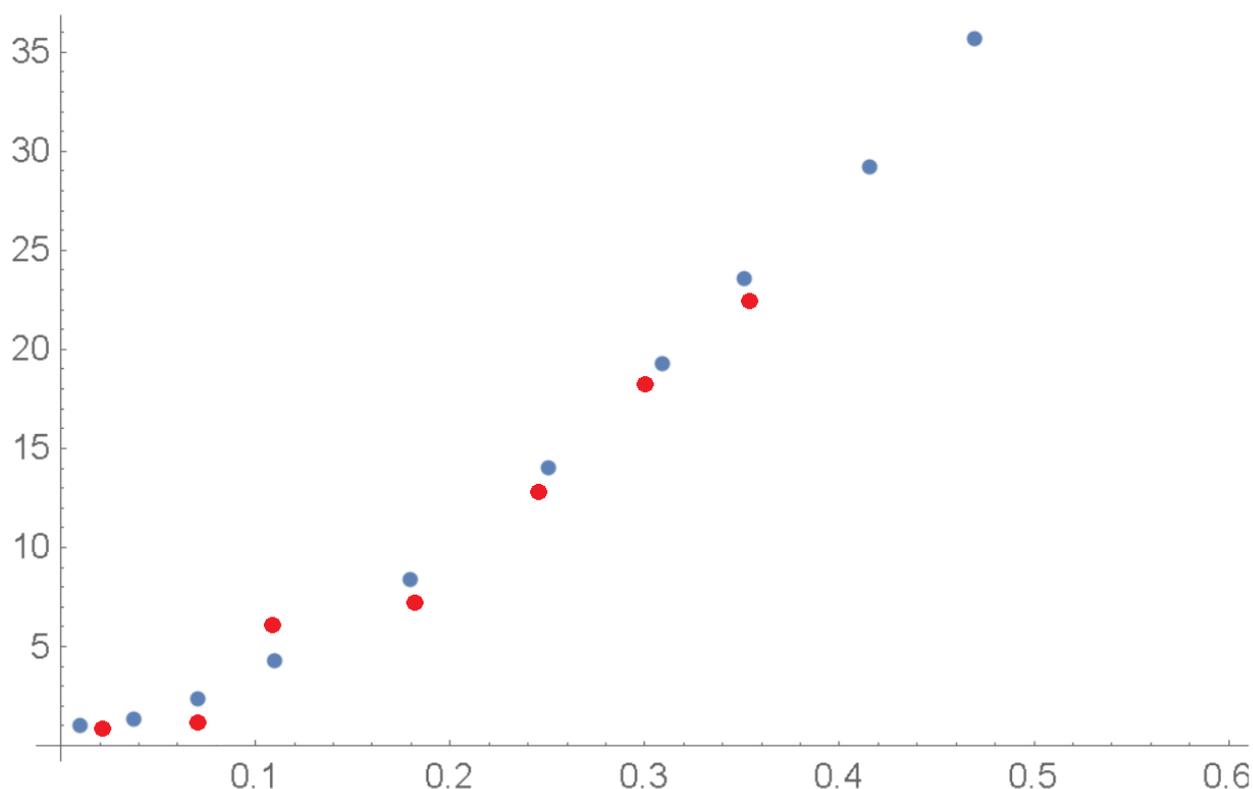


График зависимости высоты подъема (см) от угловой скорости вращения обруча (обороты в секунду). Красное – экспериментальные точки, синие – теория.

Как можно заметить, теория достаточно точно описывает эксперимент, что позволяет сделать вывод о том, что была выявлена зависимость высоты от параметров и получен ответ на поставленный вопрос.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В работе было изучено трение, начиная с базового закона трения и заканчивая сложной зависимостью коэффициента трения от скорости движения объектов друг относительно друга. Были описаны колебания предмета на круговой траектории с помощью аналогии с математическим маятником. Был получен ответ на поставленный вопрос – как сохранять предмет на одной и той же высоте без прямого воздействия (поддерживания или приклеивания). Ответ оказался довольно прост – во всем виновато вращение, с помощью которого появляется центробежное ускорение. Из второго закона Ньютона мы поняли, что именно такая конфигурация позволит предмету оставаться на определенной высоте.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *I.M.Hutchings* // Leonardo da Vinci's studies of friction. *Wear*, 2016, pages 51-66
2. *А.А.Андронов, А.А.Витт, С.З.Хайкин* // Теория колебаний. 3 издание. Москва, 1981
3. *Н.Н.Баутин, Е.А.Леонтович* // Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. Москва, 1976
4. *Ф.М.Диментберг и К.С.Колесников* // Колебания машин, конструкций и их элементов.Справочник “Вибрации в технике”, Москва, 1980, страницы 110-115
5. *А.А.Пухов* // Лекции по колебаниям и волнам: учебное пособие. В двух частях.Часть 1. Колебания. Москва, МФТИ, 2019, 208 страниц
6. *М.И.Рабинович, Д.И.Трубецков* // Введение в теорию колебаний и волн. Москва, 1984
7. *Л.А.Сосновский* // Классический закон (сухого) трения и необходимость его корректировки. *Механика машин, механизмов и материалов*, 2019, страницы 64-76 (2)

