Автономная некоммерческая общеобразовательная организация "Физтех-лицей"
(АНОО «Физтех-лицей» им. П.Л. Капицы)

XX научно-практическая конференция

«Старт в инновации»

Исследование арочной конструкции

Выполнили: Жабицкий Вячеслав, 8а

Ф.И. Класс

Руководитель:
Жабицкий М.В.,
Жабицкая Е.И.

Ф.И.О.

Московская область, г. Долгопрудный

2021 г.

Table of Contents

Аннотация

Исследование арочной конструкции

У нас есть бесконечное число планочек. Задача: построить из планочек такой столбик-арку, верхняя часть которого была бы смещена на максимальное расстояние относительно основания.

В работе показано, что максимально возможный сдвиг планочек друг относительно друга подчиняется закону гармонического ряда. Обоснована расходимость гармонического ряда. Показана теоретическая возможность построения арки, выступающей за край опоры на любую наперед заданную длину.

Проведена экспериментальная проверка гипотезы. Проведено сравнение полученных экспериментально значений выноса арки с теоретическими значениями.

Проведено исследование Арки с грузом на выступающей части.

Немного теории

Допустим, у нас есть бесконечное число планочек длины a. Задача: построить из планочек такой столбик-арку, верхняя часть которого была бы смещена на максимальное расстояние относительно основания.

Посмотрим на какое, максимальное смещение L_2 можно выдвинуть верхнюю планочку, если планочек всего две.

Будем отсчитывать координату x от левого края верхней планки.

Пусть верхняя планка наклонена на очень малый угол.

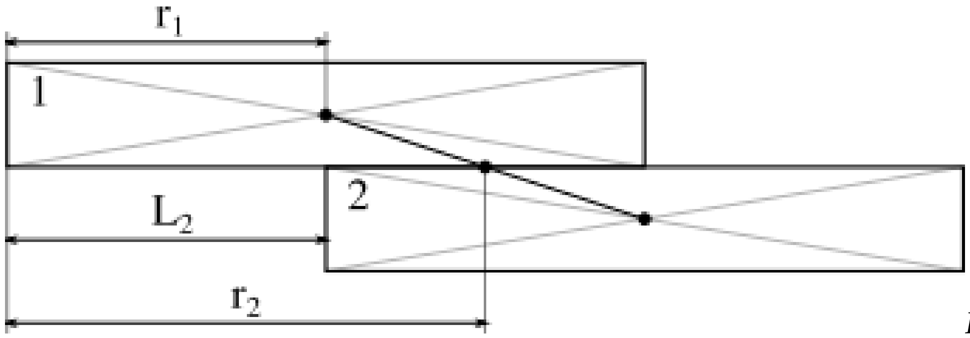


Рис. 1. Схема арки из двух планок

Тогда центр масс верхней планки имеет координату $r_1 = x_1 = \frac{a}{2}$. Для максимального смещения он должен находиться над краем нижней планки. То есть координата центра масс нижней планки составит

$$x_2 = r_1 + \frac{a}{2}$$

Тогда центр масс системы из двух планок имеет координату r_2:

$$r_2 = \frac{M \cdot r_1 + M \cdot x_2}{2M} = \frac{r_1 + \left(r_1 + \frac{a}{2}\right)}{2} = r_1 + \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} a$$

Если планок три:

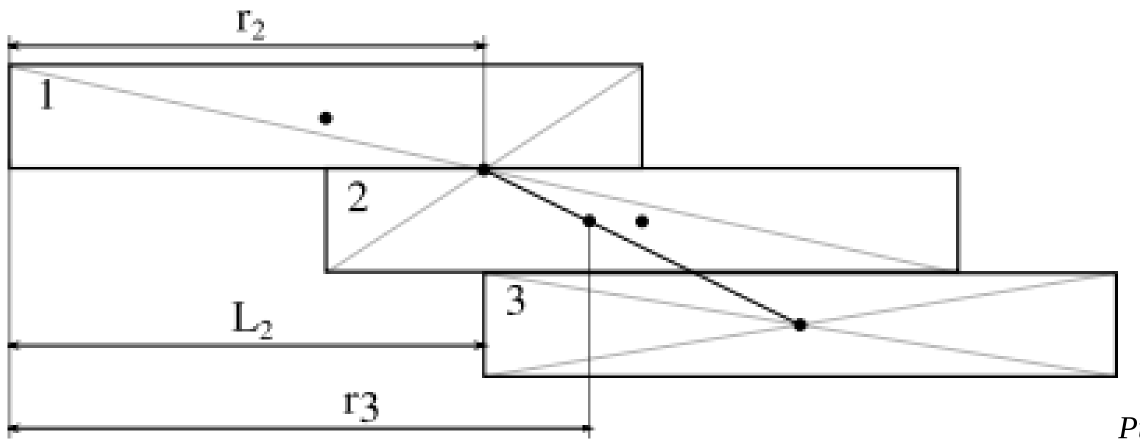


Рис. 1. Схема арки из трех планок

Если планок три, тогда центр масс системы из двух верхних планок имеет координату r_2

$$r_2 = r_1 + \frac{M}{2M}\frac{a}{2} = r_1 + \frac{1}{2}\frac{a}{2} = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}a$$

Для максимального смещения он должен находиться над краем нижней (третьей) планки. То есть координата центра масс нижней планки составит

$$x_3 = r_2 + \frac{a}{2}$$

Тогда центр масс системы из трех планок имеет координату r_3 :

$$r_3 = \frac{2M \cdot r_2 + M \cdot x_3}{3M} = \frac{2r_2 + \left(r_2 + \frac{a}{2}\right)}{3} =$$

$$= r_2 + \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$$

Расчет положения центра масс N планок.

Обозначим x_i – координата центра масс $i^{\text{-ой}}$ планки; r_i – координата центра масс первых i планок.

Допустим нам известна координата r_{N-1} – координата центра масс всех палочек, кроме нижней. Тогда координата центра масс нижней планки:

$$x_N = r_{N-1} + \frac{a}{2}$$

А координата центра масс всей системы

$$r_N = \frac{(N-1)\cdot r_{N-1} + x_N}{N} = r_{N-1} + \frac{a}{2N} =$$

$$= \frac{(N-1)\cdot r_{N-1} + x_N}{N} = r_{N-1} + \frac{a}{2N},$$

где $Y_N = \frac{a}{2N}$ – смещение центра масс при добавлении N-ой планки

Тогда координата центра масс N блоков:

$$r_N = r_{N-2} + \frac{a}{2(N-1)} + \frac{a}{2N} = \ldots$$

$$= \frac{a}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{N}\right)$$

Вынос арки $L_N = r_{N-1}$

Ряд $H_N = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{N}$ называется Гармоническим рядом[1] .

Покажем что сумма N первых членов данного ряда может быть сделана больше любого наперёд заданного числа:

$$r_N = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \frac{1}{N}\right) =$$

$$= \frac{a}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\underbrace{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \ldots + \frac{1}{2^n}}_{2^{n-1}\ \text{раз}}\right)\right) =$$

$$= \frac{a}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} + \ldots\right)\frac{a}{2}\,\frac{n+1}{2} \text{ при } N \geq 2^n.$$

Так как N стремится к бесконечности, следовательно, сумма ряда с бесконечным числом членов также стремится к бесконечности.

1 https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D1%8F%D0%B4_%D0%BE%D0%B1%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BD%D1%8B%D1%85_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8B%D1%85_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%B5%D0%BB
https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B0%D1%80%D0%BC%D0%BE%D0%BD%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D1%80%D1%8F%D0%B4

Расчет теоретического предела выноса арки из N планок

Рассчитаем по формулам (1) – (4) значения выноса и ширины арки.

- количе-ство планок N	теор. Значения суммы гармонического ряда H_i	теор. смещение центра масс Y = a/2N	теор. координата центра масс всей системы $r_{цм}$	теор. вынос арки L	теор. ширина арки L + a
1	1,0	58,9	58,9	0	117,7
2	1,5	29,4	88,3	58,9	176,6
3	1,8	19,6	107,9	88,3	206,0
4	2,1	14,7	122,6	107,9	225,6
5	2,3	11,8	134,4	122,6	240,3
6	2,5	9,8	144,2	134,4	252,1
7	2,6	8,4	152,6	144,2	261,9
8	2,7	7,4	159,9	152,6	270,3
9	2,8	6,5	166,5	159,9	277,6
10	2,9	5,9	172,4	166,5	284,2
11	3,0	5,4	177,7	172,4	290,1
12	3,1	4,9	182,6	177,7	295,4
13	3,2	4,5	187,2	182,6	300,3
14	3,3	4,2	191,4	187,2	304,9
15	3,3	3,9	195,3	191,4	309,1
16	3,4	3,7	199,0	195,3	313,0
17	3,4	3,5	202,4	199,0	316,7
18	3,5	3,3	205,7	202,4	320,1
19	3,5	3,1	208,8	205,7	323,4
20	3,6	2,9	211,7	208,8	326,5
21	3,6	2,8	214,5	211,7	329,4
22	3,7	2,7	217,2	214,5	332,2
23	3,7	2,6	219,8	217,2	334,9
24	3,8	2,5	222,2	219,8	337,5
25	3,8	2,4	224,6	222,2	339,9

Теоретически в этой последовательности нет предела (навес пропорционален логарифму количества планок в башне – его можно сделать любым), есть только предел, задаваемый здравым смыслом.[2]

2 Теоретически в этой последовательности нет предела (навес пропорционален логарифму количества планочек в арке – его можно сделать любым), есть только предел, задаваемый здравым смыслом. Более рациональный метод состоит в том, чтобы на выступающие за кромку стола планочки сверху ставить другие планочки так, чтобы они служили противовесом. Укладывая в стопку четыре планочки первым способом, можно обеспечить навес чуть больше a. Нашим способом с помощью 63 планок можно получить навес, равный 3*L*. Использование метода противовесов помогает и в сооружении арки из 28 планок. Если левая и правая части арки уравновешены, пролет может составить 3,97*a*. Существует по крайней мере один метод строительства арки, при котором обе стороны ее не уравновешены, а пролет равен примерно 4,35a

На диаграмме 1 Представлены зависимости смещения центра масс очередной планки, координаты центра масс всей системы, вынос и ширина арки для разного количества использованных планок (от 1 до 25).

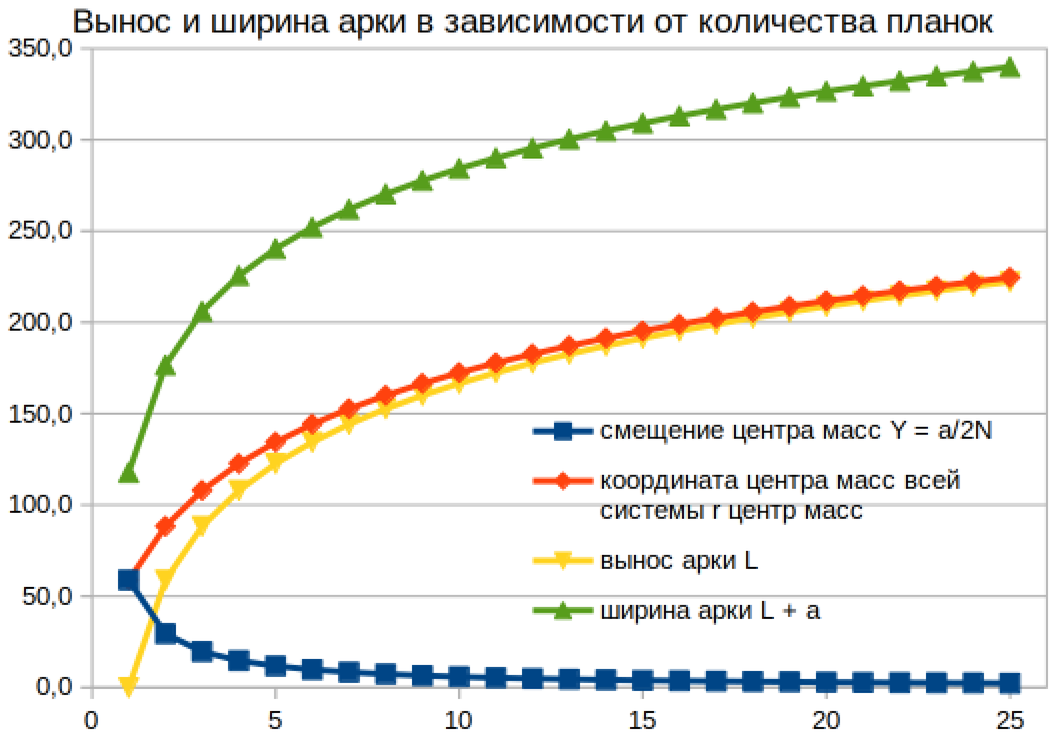


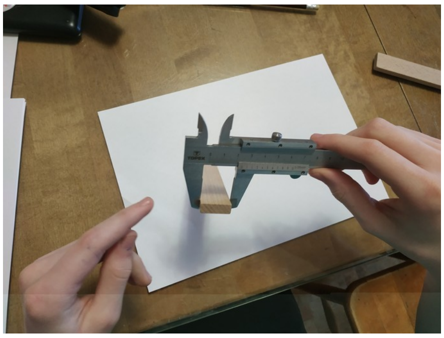
Диаграмма. 1. Теоретический расчет ширины и выноса арки

Экспериментальная часть. Измерение максимального выноса арки

Оборудования и материалы:

Введём обозначения : длина планки a; ширина планки b; толщина c .

Измерение параметров планочек:



Для измерения длины, ширины и толщины палочки, сначала я провёл грубую оценку, с точностью до миллиметра, методом рядов.
Потом с помощью штангенциркуля было измерено с точностью до десятых миллиметра.
Результат: планка имеет следующие размеры

Длина: $a = 117{,}7 \pm 0{,}1$мм.

Ширина: $b = 23{,}3 \pm 0{,}1$мм

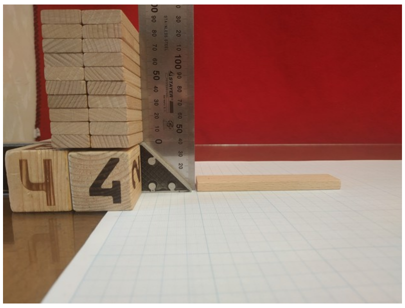
Толщина: $c = 12{,}7 \pm 0{,}1$мм.

Вес планочки:

Измерение масс аланок и груза:

Взвесив 10 планок получили 144 грама. Таким образом масса планки равна M=14,4 грамма.
Точности кухонных весов для взвешивания одного грузика явно не достаточно. Так как у нас было много одинаковых грузов массы m, то взвесив 16 маленьких грузов мы получили 50 грамм.
Масса груза примерно 3 грамма.

Измерение выноса арки



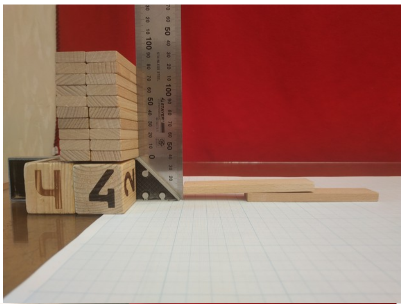
При построении мы использовали следующие обозначения:

Вынос арки L: от левого конца верхней, до левого конца нижней.

Длина арки $(L+a)$: от верхнего висячего конца до самой дальней точки конструкции.

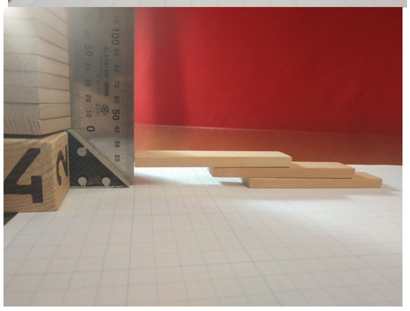
Арка построена на миллиметровке, поэтому все длины измеряются в миллиметрах.

Построение арки



Чтобы уравновесить планку, нужно положить ее так, чтобы ее центр приходился на край планки, лежащей ниже, и тогда получим вынос, равный:

$$L_2 = \frac{a}{2}.$$



Потом положим на нее следующую планку и сделаем так, чтобы общий центр масс двух планок приходился на край третьей планки. Вынос теперь будет равен

$$L_3 = \frac{a}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)$$

Потом положим под них четвертую планку и уложим стопку так, чтобы центр масс трех планок приходился на край четвертой планки. Новый вынос будет равен:

$$L_4 = \frac{a}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$

Когда башня будут построена из N планок, вынос будет равен:

$$L_N = r_{N-1} = \frac{a}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{N-1}\right)$$

где выражение в скобках – гармонический ряд.

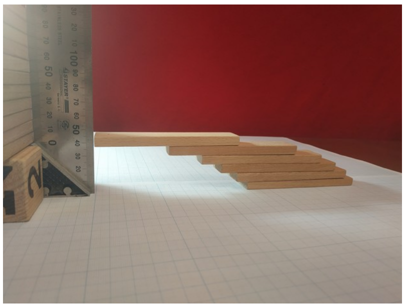
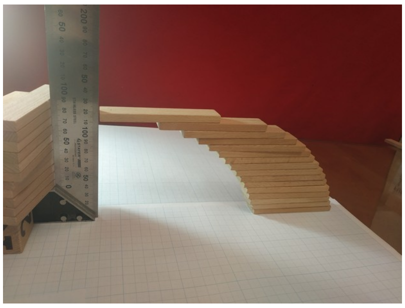
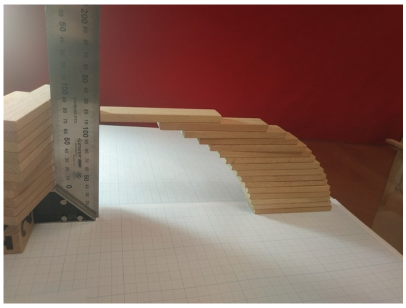
В теоретической части было показано, что

$$L_N = r_{N-1} > \frac{a}{2}\,\frac{n+1}{2} \text{ при } N \geq 2^n$$

Сравнение экспериментально полученных значений максимального выноса арки с теоретическими значениями.

Проведено измерение ширины и выноса арки для башни высотой до 15 планок.

Количе-ство	теор.	эксп.	эксп.	теор. с грузом	теор. с грузом	эксп. С гру-зом	эксп. С гру-зом
планок	ширина арки	ширина арки	вынос ар-ки	ширина арки	вынос арки	ширина арки	вынос арки
N	L + a	L + a	L	Lg+a	Lg	L + a	L
1	117,7	118	0,3	117,7	0,0	118	0,3
2	176,6	176	58,3	166,1	48,4	166	48,3
3	206,0	206	88,3	192,6	74,9	192	74,3
4	225,6	223	105,3	210,9	93,2	212	94,3
5	240,3	235	117,3	224,8	107,1	225	107,3
6	252,1	247	129,3	236,1	118,4	236	118,3
7	261,9	252	134,3	245,6	127,9	242	124,3
8	270,3	262	144,3	253,8	136,1	251	133,3
9	277,6	267	149,3	260,9	143,2	259	141,3
10	284,2	276	158,3	267,3	149,6	261	143,3
11	290,1	281	163,3	273,1	155,4	267	149,3
12	295,4	285	167,3	278,3	160,6	276	158,3
13	300,3	290	172,3	283,1	165,4	280	162,3
14	304,9	296	178,3	287,6	169,9	286	168,3
15	309,1	304	186,3	291,7	174,0	290	172,3

Построение и расчет арки с грузом

.Таким образом, показано, что мост можно построить.
Но можно ли перейти по нему? А вдруг конструкция на столько неустойчивая, что любая нагрузка будет для нее губительна?

Посмотрим на какое, максимальное смещение $L_N = r_{N-1}$ можно выдвинуть верхнюю планочку, если планочек всего две, а на краю верхней находится груз массы m.

Будем также отсчитывать координату x от левого края верхней планки. Груз при этом находится на самом краю и координата его центра мас $x_0 = 0$.

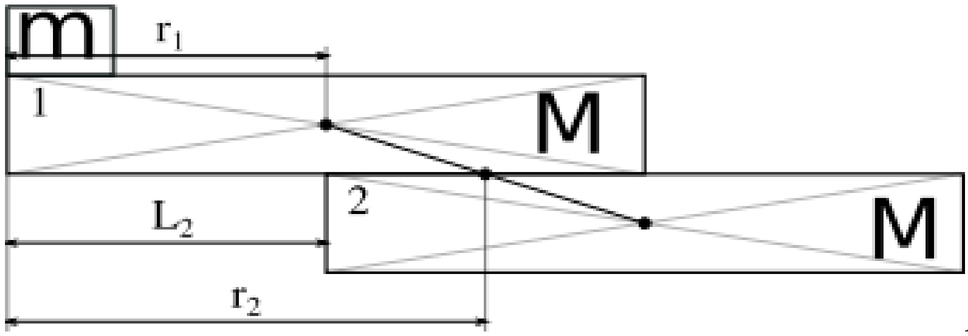


Рис. 1.

Схема арки из двух планок

Центр масс верхней планки имеет координату $x_1 = \frac{a}{2}$.

А координата центра масс системы, состоящей из первой планки и груза имеет координату

$$r_1 = \frac{m \cdot x_0 + M \cdot x_1}{m + M} = x_1 \frac{1}{1 + \frac{M}{m}} = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{1+\mu}, \quad \text{где} \quad \mu = \frac{m}{M}$$

Для максимального смещения он должен находиться над краем нижней планки. То есть координата центра масс нижней планки составит

$$x_2 = r_1 + \frac{a}{2}$$

Тогда центр масс системы из двух планок и груза имеет координату r_2:

$$r_2 = \frac{(M+m) \cdot r_1 + M \cdot x_2}{2M + m} = \frac{(M+m) \cdot r_1 + M \cdot x_2}{2M + m} =$$

$$= r_2 + \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2+\mu} = \frac{a}{2} \left(\frac{1}{1+\mu} + \frac{1}{2+\mu} \right)$$

Для максимального смещения он должен находиться над краем нижней (третьей) планки. То есть координата центра масс нижней планки составит

$$x_3 = r_2 + \frac{a}{2}$$

Тогда центр масс системы из трех планок имеет координату r_3

$$r_3 = \frac{(2M+m)\cdot r_2 + M\cdot x_3}{3M+m} = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{1+\mu}+\frac{1}{2+\mu}+\frac{1}{3+\mu}\right)$$

Расчет положения центра масс N планок.

Допустим нам известна координата r_{N-1} – координата центра масс в груза и всех планочек, кроме нижней. Тогда координата центра масс нижней планки:

$$x_N = r_{N-1} + \frac{a}{2}$$

А координата центра масс всей системы

$$r_N = \frac{((N-1)M+m)\cdot r_{N-1} + x_N\cdot M}{N\cdot M+m} = r_{N-1} + \frac{a}{2}\cdot\frac{1}{N+\mu}$$

где $Y_N = \frac{a}{2(N+\mu)}$ – смещение центра масс при добавлении N-ой планки

Тогда координата центра масс N блоков:

$$r_N = r_{N-2} + \frac{a}{2(N-1+\mu)} + \frac{a}{2(N+\mu)} = \ldots$$

$$= \frac{a}{2}\left(\frac{1}{1+\mu}+\frac{1}{2+\mu}+\frac{1}{3+\mu}+\frac{1}{4+\mu}+\frac{1}{5+\mu}+\ldots+\frac{1}{N+\mu}\right).$$

Вынос арки $L_N = r_{N-1}$

Покажем что сумма N первых членов данного ряда также может быть сделана больше любого наперёд заданного числа.

Параметр отношения массы груза к массе планку $\mu = \frac{m}{M}$ конечен. $\mu < r \in Z$.

Тогда

$$r_N\, \frac{a}{2}\left(\frac{1}{1+\mu}+\frac{1}{2+\mu}+\frac{1}{3+\mu}+\frac{1}{4+\mu}+\frac{1}{5+\mu}+\ldots+\frac{1}{N+\mu}\right) \geq$$

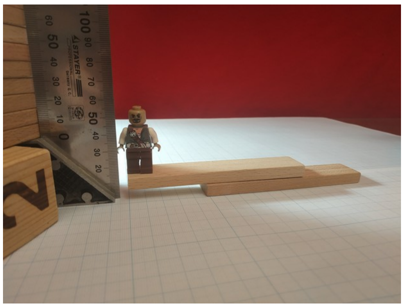
$$\geq \frac{a}{2}\left(\frac{1}{1+r}+\frac{1}{2+r}+\frac{1}{3+r}+\frac{1}{4+r}+\frac{1}{5+r}+\ldots+\frac{1}{N+r}\right) =$$

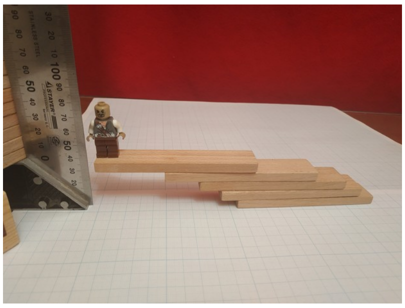
$$= \frac{a}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{r}+\frac{1}{1+r}+\frac{1}{2+r}+\frac{1}{3+r}+\ldots+\frac{1}{N+r}\right) -$$

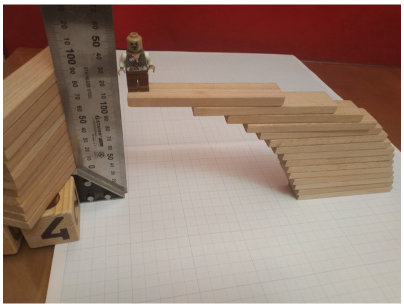
$$- \frac{a}{2}\left(\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{r}\right)\right) =$$

$$= H_{N+r} - H_r$$

Где H_i – сумма первых i членов гармонического ряда. Так как r – ограничено, N может быть устремлено к бесконечности, а сумма гармонического ряда с бесконечным числом членов стремится к бесконечности (расходится), следовательно, сумма исходного ряда с бесконечным числом членов также стремится к бесконечности.







На диаграмме 3 представлены теоретические и экспериментальные значения размаха и ширины арки с грузом и без груза.

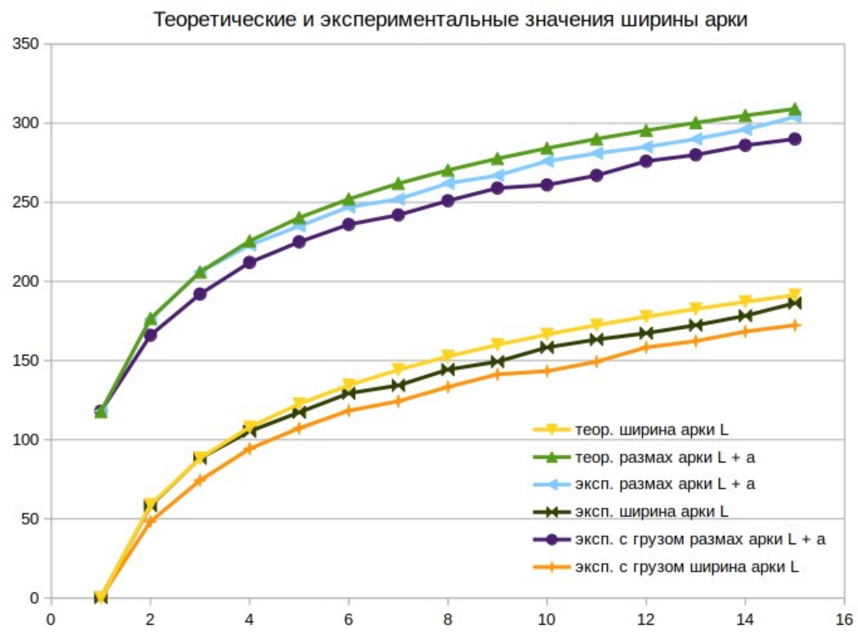


Диаграмма. 2 Сравнение теоретического и экспериментально полученного максимального выноса арки

Получено хорошее совпадение экспериментально полученных значений выноса арки с теоретическими

Наличие груза уменьшает вынос арки, но не приводит к сходимости ряда.

Таким образом теоретически арка может быть построена с выносом более любой наперед заданной длины. То есть по такому «мосту» можно перейти пропасть любой ширины:)

Заключение

Мы построили из планочек такой столбик-арку, верхняя часть которого была бы смещена на максимальное расстояние относительно основания.

В работе показано, что максимально возможный сдвиг планочек друг относительно друга подчиняется закону гармонического ряда. Обоснована расходимость гармонического ряда. Показана теоретическая возможность построения арки, выступающей за край опоры на любую наперед заданную длину.

Проведена экспериментальная проверка гипотезы. Проведено сравнение полученных экспериментально значений длины выступающей за край опоры части с теоретическими значениями.

Проведено исследование Арки с грузом на выступающей части. Показано, что наличие груза уменьшает вынос арки, но не приводит к сходимости ряда. Таким образом теоретически арка может быть построена с выносом более любой наперед заданной длины. Притом можно построить арку, выдерживающую груз любой наперед заданной массы на своем выносе. То есть по такому «мосту» можно перейти пропасть любой ширины:).

Литература

1. Лестница в бесконечность https://etudes.ru/etudes/stairway-to-heaven/

2. Гармонический ряд https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B0%D1%80%D0%BC%D0%BE%D0%BD%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D1%80%D1%8F%D0%B4