

**Автономная некоммерческая общеобразовательная  
организация "Физтех-лицей"  
(АНОО «Физтех-лицей» им. П.Л. Капицы)**

## **XX научно-практическая конференция**

**«Старт в инновации»**

### **Исследование закономерностей движения математического маятника**

Выполнили:  
Архипова Екатерина, 8А  
Рибсам Эдуард, 8А  
Соломенникова Василиса, 8А  
Руководитель:  
Самсонов В. Н.

Московская область, г. Долгопрудный

2021 г.

## Введение

**Математическим маятником** называют материальную точку (тело небольших размеров), подвешенную на тонкой невесомой нерастяжимой нити или на невесомом стержне [1].

Несмотря на простоту системы, получаемые уравнения движения имеют обширнейшее применение во всех отраслях физики – начиная от классических теорий механики и электродинамики до квантовой теории поля. Дело в том, что любое колебательное движение может быть разложено на простые составляющие – гармоника, каждое из которых описывается уравнением, получаемым для математического маятника.

Следует пояснить, что когда говорят о математическом маятнике, то обычно подразумевают теорию его малых колебаний. Дело в том, что когда амплитуда колебаний становится значимой, уравнение движения такого маятника становится нелинейным и не может быть найдено в аналитических функциях. То есть для его решения приходится использовать различные приближенные методы.

Несмотря на свою простоту, математический маятник связан с рядом интересных явлений [2]:

- Если амплитуда колебания маятника близка к  $180^0$ , то есть движение маятника на фазовой плоскости близко к сепаратрисе, то под действием малой периодической вынуждающей силы система демонстрирует хаотическое поведение. Это одна из простейших механических систем, в которой хаос возникает под действием периодического возмущения [3].

- Если точка подвеса не неподвижна, а совершает колебания, то у маятника может появиться новое положение равновесия. Если точка подвеса достаточно быстро колеблется вверх-вниз, то маятник приобретает устойчивое положение «вверх тормашками». Такая система называется маятником Капицы.

- В условиях вращения Земли при достаточно длинной нити подвеса плоскость, в которой маятник совершает колебания, будет медленно поворачиваться относительно земной поверхности в сторону, противоположную направлению вращения Земли (маятник Фуко).

**Целью** работы является проверка соответствий характера колебаний малого груза, подвешенного на длинной нити, классической теории математического маятника.

### **Задачи исследования:**

1. Проверить теоретическое утверждение о независимости периода малых колебаний математического маятника от массы подвешенного груза.

2. Проверить теоретический вывод теории малых колебаний математического маятника о независимости периода колебаний от начального отклонений груза от положения равновесия.

3. Получить экспериментальную зависимость периода колебаний математического маятника  $T$  от длины подвеса  $l$  и проверить её соответствие теоретической формуле  $T = 2\pi\sqrt{l/g}$  ( $g=9,81$  м/с<sup>2</sup> – ускорение свободно падения).

**Основным методом** исследования являлось постановка физического эксперимента при различных параметрах. Для изготовления математического маятника использовалась тонкая нерастяжимая нить и два груза известной массы (гантели в 480г и 2кг). Нить закреплялась на достаточной высоте для обеспечения удобного наблюдения малых колебаний. В качестве измерительных инструментов были использованы: строительная рулетка, линейка с миллиметровыми делениями, секундомер и бытовые весы.

## 1. Краткая теория математического маятника.

Математический маятник – это модель системы, совершающей гармонические колебания (то есть колебания, происходящие по закону синуса, или косинуса). Свободные колебания математического маятника при малых углах отклонения описываются уравнением гармонических колебаний:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где  $A$  – амплитуда колебаний, то есть максимальное отклонение от положения равновесия;  $\omega = 2\pi/T$  – так называемая циклическая частота, то есть число колебаний за  $2\pi$  секунд;  $\varphi_0$  – начальная фаза, число, характеризующее начальное положение маятника. Это уравнение имеет характерный график как на рис.1 (см. ниже):

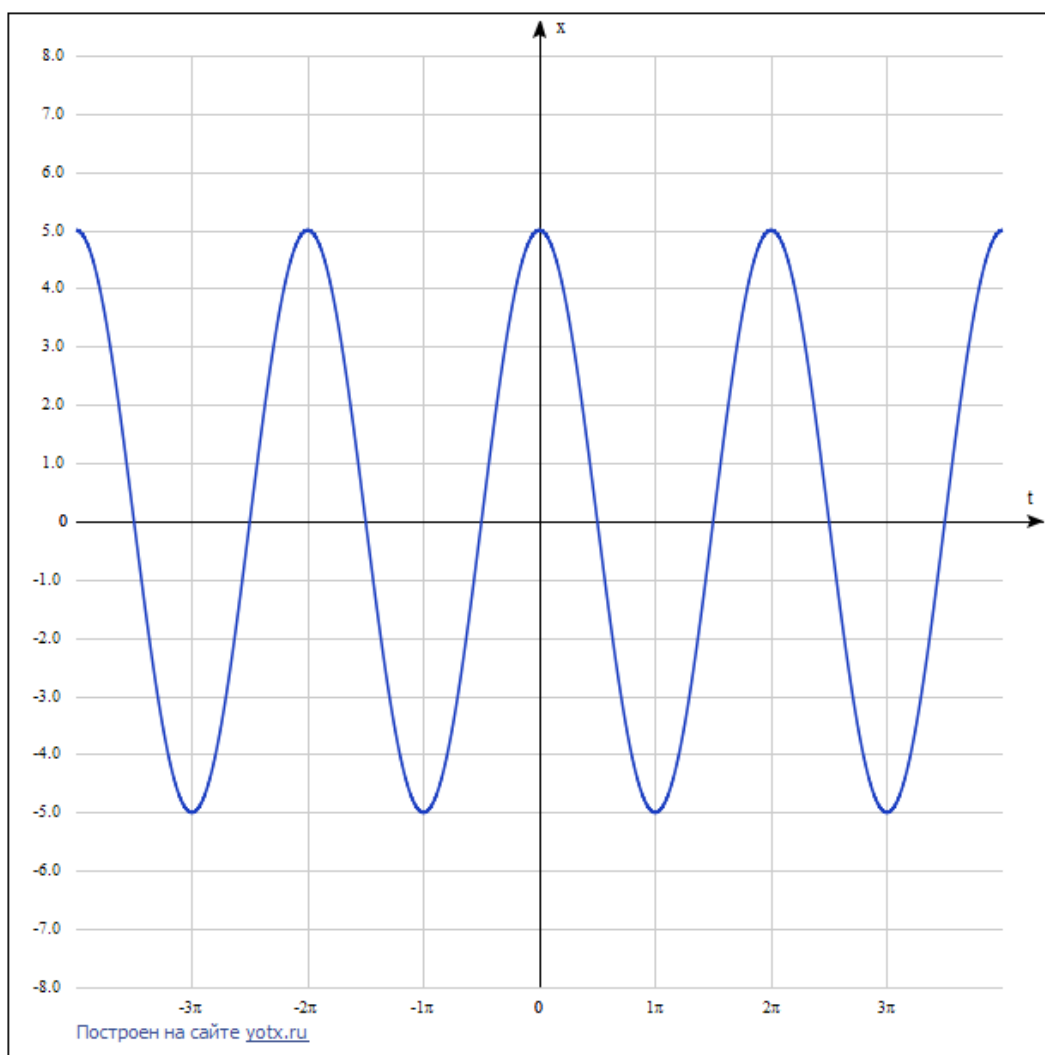


Рис. 1. График гармонической функции для  $A = 5$ ,  $\omega = 1$  и  $\varphi_0 = 0$ .

В положении равновесия сила тяжести и сила упругости нити уравновешивают друг друга, и материальная точка (груз) находится в покое (см. рис.2). При отклонении материальной точки от положения равновесия на малый угол  $\alpha$  на тело будет действовать возвращающая сила  $F$ , которая является тангенциальной составляющей силы тяжести:

$$F = mg \sin \alpha$$

Данная сила сообщает материальной точке тангенциальное ускорение, направленное по касательной к траектории, и материальная точка начинает двигаться к положению равновесия с возрастающей скоростью. По мере приближения к положению равновесия возвращающая сила, а следовательно, и тангенциальное ускорение точки, уменьшаются. В момент прохождения положения равновесия угол отклонения  $\alpha = 0^\circ$ , тангенциальное ускорение также равно нулю, а скорость материальной точки максимальна. Далее материальная точка по инерции проходит положение равновесия и, двигаясь в направлении, противоположном силе  $\vec{F}$ , сбавляет скорость. В крайнем положении материальная точка останавливается, а затем начинает двигаться в обратном направлении.

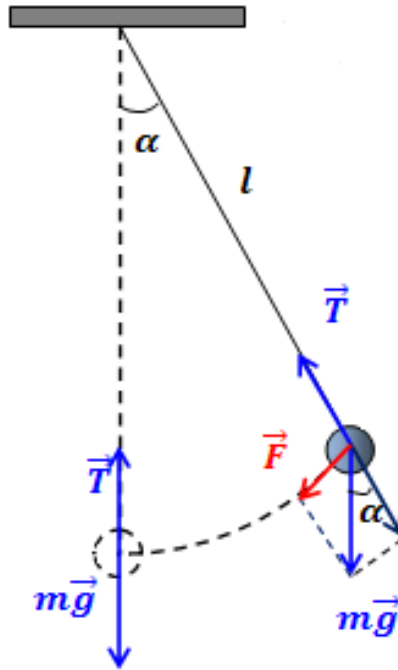


Рис 2. (взято из источника [4])

Как следует из теории малых колебаний математического маятника [5], период колебаний математического маятника не зависит от массы груза и амплитуды колебаний, и может быть найден по формуле:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (1)$$

где  $l$  – длина подвеса,  $g$  – ускорение свободного падения ( $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ ).

## 2. Описание экспериментальной установки

Для снижения влияния сил сопротивления воздуха и увеличения продолжительности колебаний был использован максимально длинный подвес и максимально тяжелые грузы, доступные в домашних условиях; а именно, суровая нить крепилась к турнику на высоте изначально более двух метров. Во избежание вращательных колебаний подвес сделали двойным (см. рис 3).

Гантели, в качестве подвеса, были выбраны из соображений их массы при относительной компактности.

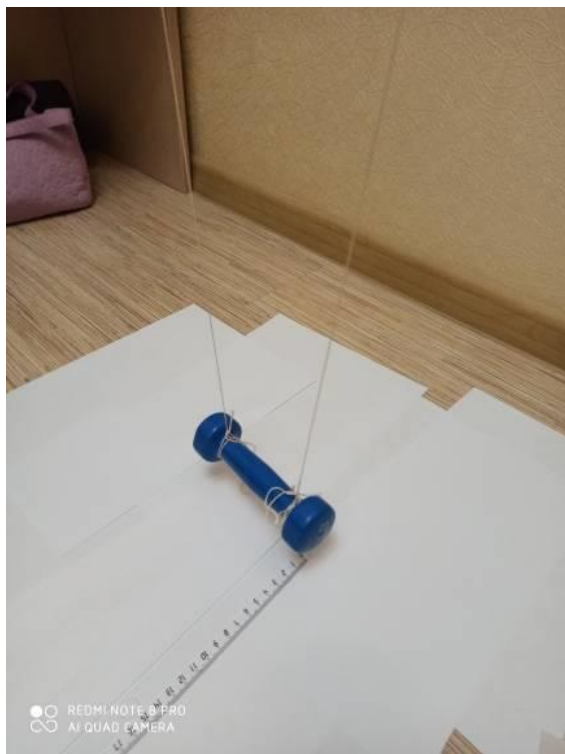


Рис. 3. Слева - малый груз на максимально длинном подвесе. Начальная амплитуда колебаний выставлялась по линейке с точностью порядка 0,5 см.

Справа - общий вид экспериментальной установки на завершающем этапе измерений (подвес максимально короткий).

### 3. Исследование зависимости периода колебаний математического маятника от амплитуды и массы подвеса

#### 3.1 Влияние сопротивления воздуха

Перед каждой серией измерений с обоими грузами была проведена оценка влияния сил сопротивления воздуха на результаты эксперимента; а именно, замерялось время, в течение которого амплитуда свободных колебаний убывала в 2 раза. В наших опытах - от 20 до 10 см. Затем мы рассчитывали коэффициент затухания  $\delta$ , используя формулу из справочника по физике [5]:

$$\delta = \frac{1}{t} \ln(A / A_0).$$

Вообще говоря, циклическая частота  $\omega = 2\pi/T$  затухающих колебаний, то есть таких в которых действуют силы сопротивления, несколько меньше частоты свободных колебаний согласно формуле [3]:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

В наших опытах, оказалось, что время убывание амплитуды в два раза для гантели 480г равно 6 мин. 39 сек., а для гантели 2кг – 13мин.12сек. Соответствующие коэффициенты затухания равны  $\delta_1 = 17,4 \times 10^{-4} \text{ с}^{-1}$  и  $\delta_2 = 8,75 \times 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ . Эти значения на четыре порядка меньше характерных значений  $\omega = 2\pi/T$ , и на два порядка меньше оценки ошибки эксперимента. Таким образом, в нашем эксперименте можно было полностью пренебречь затуханием колебаний вследствие сопротивления воздуха.

#### 3.2 Зависимость периода колебаний от массы груза и амплитуды

В опыте по исследованию зависимости периода колебаний математического маятника от амплитуды, начальная амплитуда изменялась с шагом в 5 см. Опыт проводился по три раза для каждого значения, и измерялось время 10 колебаний. Полученные данные для массы 480г и 2 кг приведены в таблицах 1 и 2, соответственно.

В последних колонках таблиц приведены рассчитанные значения периодов колебаний и оценки погрешностей измерений.

Таблица 1. Масса груза 480 г., длина подвеса 204 см.

Амплитуда, см	t <sub>1</sub> , с	t <sub>2</sub> , с	t <sub>3</sub> , с	t <sub>ср</sub> , с	T <sub>ср</sub> , с	ΔT, с
5	28,34	28,47	28,40	28,403	2,840	0,057
10	28,23	28,50	28,78	28,503	2,850	0,057
15	28,64	28,40	28,52	28,520	2,852	0,044
20	28,76	28,50	28,66	28,640	2,864	0,041
25	28,28	28,57	28,70	28,517	2,852	0,038
30	28,37	28,83	28,45	28,550	2,855	0,023

Таблица 2. Масса груза 2 кг., длина подвеса 204 см.

Амплитуда, см	t <sub>1</sub> , с	t <sub>2</sub> , с	t <sub>3</sub> , с	t <sub>ср</sub> , с	T <sub>ср</sub> , с	ΔT, с
5	28,38	28,55	28,62	28,517	2,852	0,037
10	28,52	28,46	28,47	28,483	2,848	0,050
15	28,53	28,68	28,36	28,523	2,852	0,049
20	28,45	28,15	28,40	28,333	2,833	0,049

25	28,61	28,30	28,57	28,493	2,849	0,047
30	28,87	28,52	28,65	28,680	2,868	0,045

### 3.3 Зависимость периода колебаний от длины подвеса

Второй этап эксперимента был посвящен исследованию зависимости периода колебаний от длины подвеса. Были проведены пять опытов с различной длиной. Для оценки погрешности каждый из опытов повторялся трижды. Время измерялось для 10 колебаний. Результаты эксперимента приведены в Таблице 3. Для проверки линейной зависимости квадрата периода  $T$  от длины маятника, вытекающей из приведенной выше формулы (1), в таблицу были добавлены колонки для подсчета соответствующих значений.

Таблица 3. Масса груза 2 кг.

Длина, см	$t_1, c$	$t_2, c$	$t_3, c$	$t_{cp}, c$	$T_{cp}, c$	$T_{cp}^2, c^2$	$\Delta T, c$	$\Delta T^2, c^2$
204	28,380	28,550	28,620	28,517	2,852	8,132	0,028	0,160
182	26,930	26,920	26,780	26,877	2,688	7,224	0,036	0,192
157	24,950	25,050	24,950	24,983	2,498	6,242	0,035	0,175
115	21,590	21,220	21,490	21,433	2,143	4,594	0,035	0,149
82,5	18,350	18,340	18,310	18,333	1,833	3,361	0,028	0,103

## 4. Анализ полученных результатов

### 4.1 Анализ погрешностей эксперимента

Перед построением графиков для каждого из опытов была проведена оценка систематической и случайной погрешностей. Так длина подвеса, с учетом параметров установки, не могла быть нами оценена точнее 0,5 см. Таким образом, максимальная относительная погрешность длины составила порядка 0,5%.

Масса подвесов измерялась домашними бытовыми весами, имеющими заявленную производителем точность 1г. Относительная погрешность массы, таким образом, составила примерно 0,2%.

Для систематической погрешности секундомера (использовался встроенный в смартфон), обусловленной реакцией человека, обычно принимается погрешность равной 0,1 сек., что дает для относительной погрешности периода оценку в 0,1%.

Случайные абсолютные погрешности для времени 10 колебаний, учитывая малое число опытов  $n=3$ , рассчитывались по стандартной формуле [6]:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{\sum_i (t_i - t_{cp})^2}{n(n-1)}}.$$

Полученные значения приведены в Таблицах 1, 2 и 3 и соответствуют относительной погрешности в 1%.

Таким образом, случайная погрешность измерения времени является доминирующей и остальные погрешности могут не учитываться.

### 4.2 Зависимость периода колебаний от амплитуды и массы подвеса

Для наглядности полученных результатов данные были представлены в виде следующих графиков.

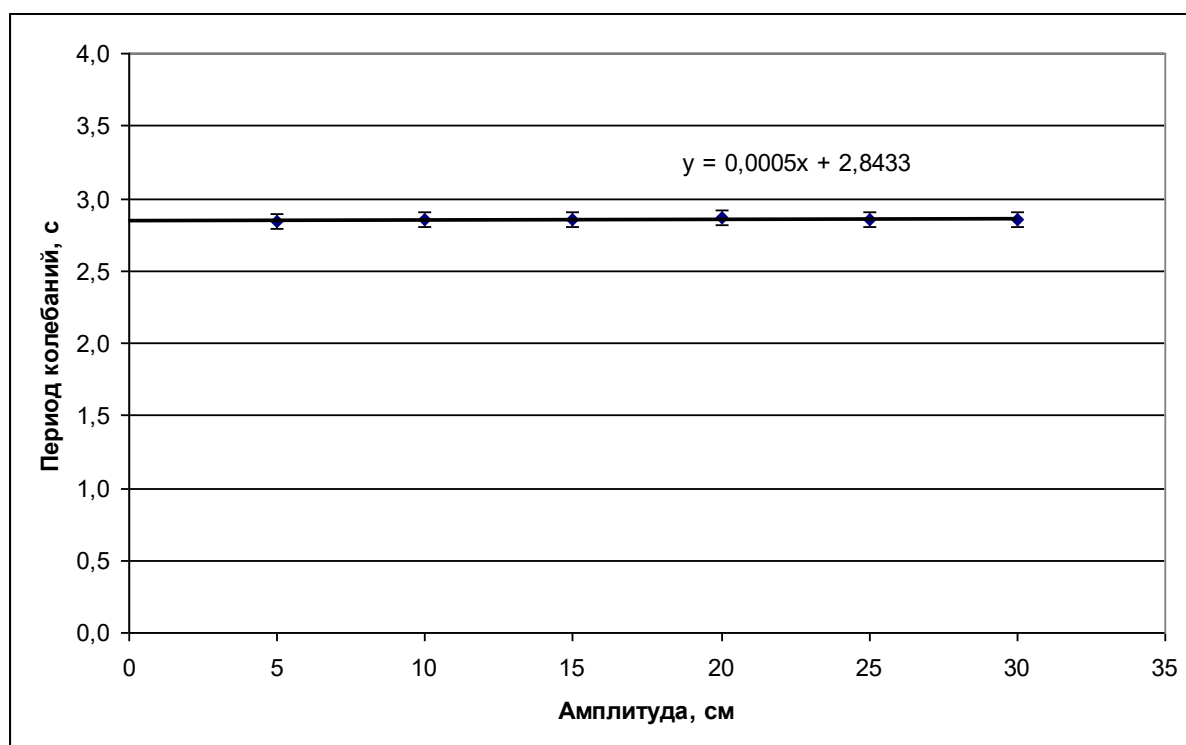


Рисунок 4. Зависимость периода колебаний от начальной амплитуды для массы груза 480г. Через точки с отмеченными погрешностями проведена линия тренда и указано её уравнение.

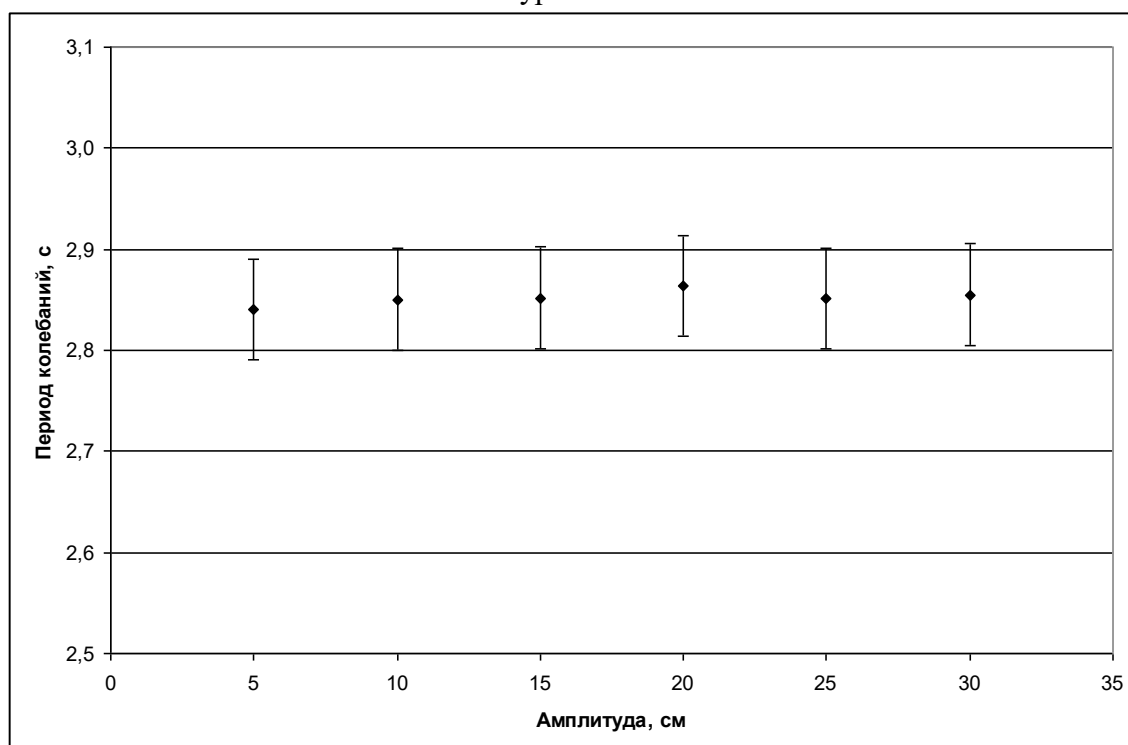


Рисунок 5. Увеличенный масштаб по оси ординат. Масса груза 480г.



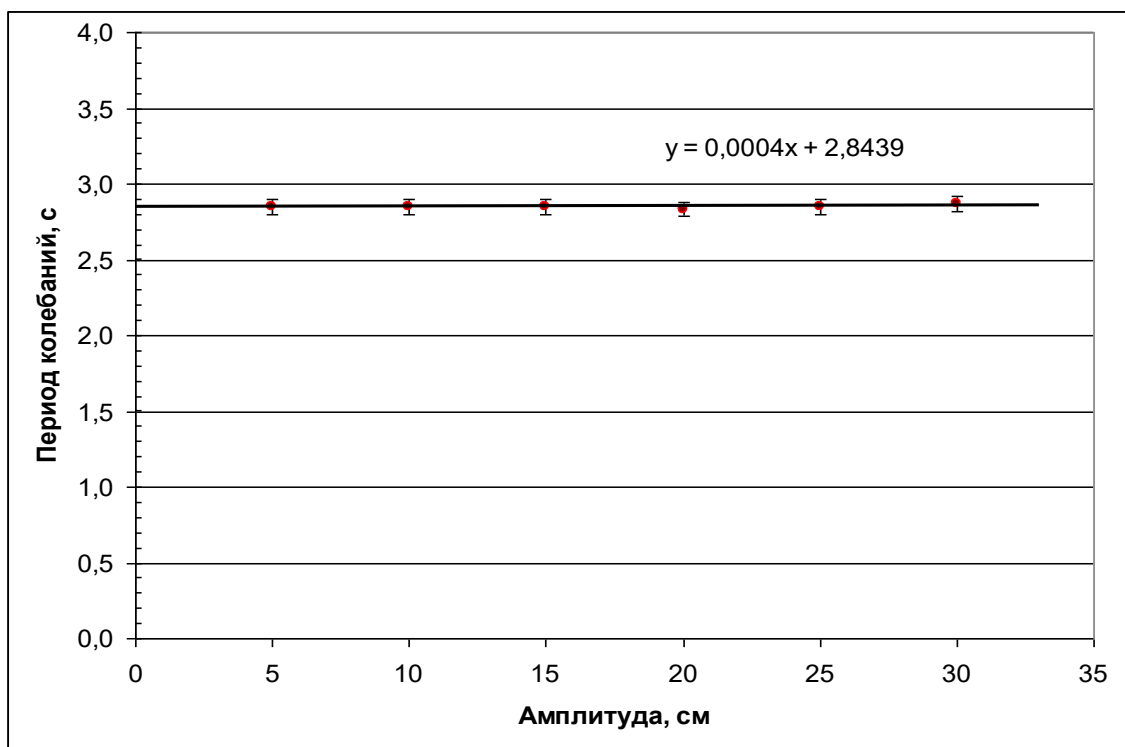


Рисунок 6. Увеличенный масштаб по оси ординат. Масса груза 2кг.

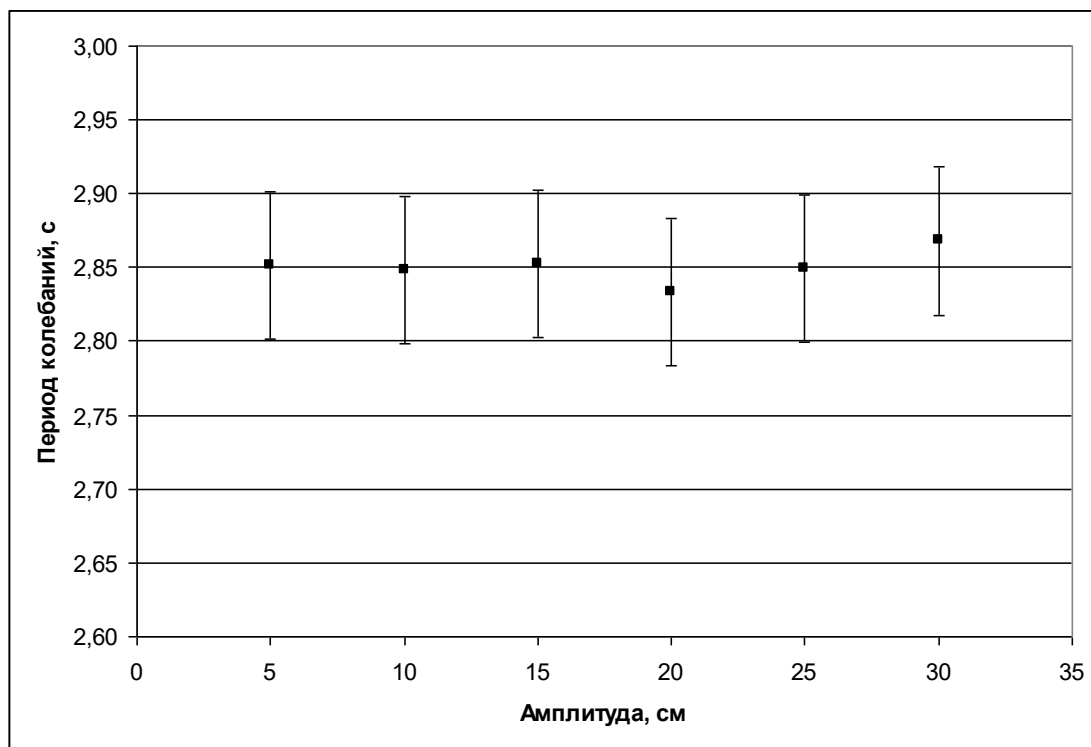


Рисунок 7. Зависимость периода колебаний от начальной амплитуды для массы подвеса 2 кг. Через точки с отмеченными погрешностями проведена линия тренда и указано её уравнение.

Из графиков, представленных на рис.4 и рис.6, видно, что линии трендов имеют незначительный наклон. Однако доверительные интервалы всех точек перекрываются по вертикали и позволяют провести через них горизонтальные прямые, что хорошо видно при увеличении масштаба по осям ординат (см. рис. 5 и 6).

Таким образом, в пределах исследованных отклонений математического маятника по вертикали (на 30 см при длине подвеса около 2 м, что соответствует углу примерно  $9^0$ ), зависимости периода колебаний от амплитуды не выявлено.

#### 4.3 Зависимость периода колебаний от массы груза

Как видно из сравнения данных из таблиц 1 и 2, а также сравнения уравнений линий тренда на рисунках 4 и 5, периоды малых колебаний практически совпадают, в пределах погрешности, для масс, различающихся примерно в 4 раза.

Например, для максимальной длины подвеса 204 см. и для амплитуды колебаний 5см, для периодов двух маятников мы имеем значения  $T_1=2,84 \pm 0,06$  и  $T_2=2,85 \pm 0,04$ .

Таким образом, можно заключить, что для широкого диапазона массивных грузов, размеры которых много меньше длины подвеса, зависимость периода математического маятника от массы не проявляется.

#### 4.4 Зависимость периода колебаний от длины подвеса

Из формулы (1) для периода малых колебаний математического маятника следует, что квадрат периода должен линейно зависеть от длины подвеса

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l.$$

Откладывая эти величины по абсциссе и ординате, мы получим точки, почти идеально лежащие на прямую линию, проходящую через начало координат (см. рис.8).

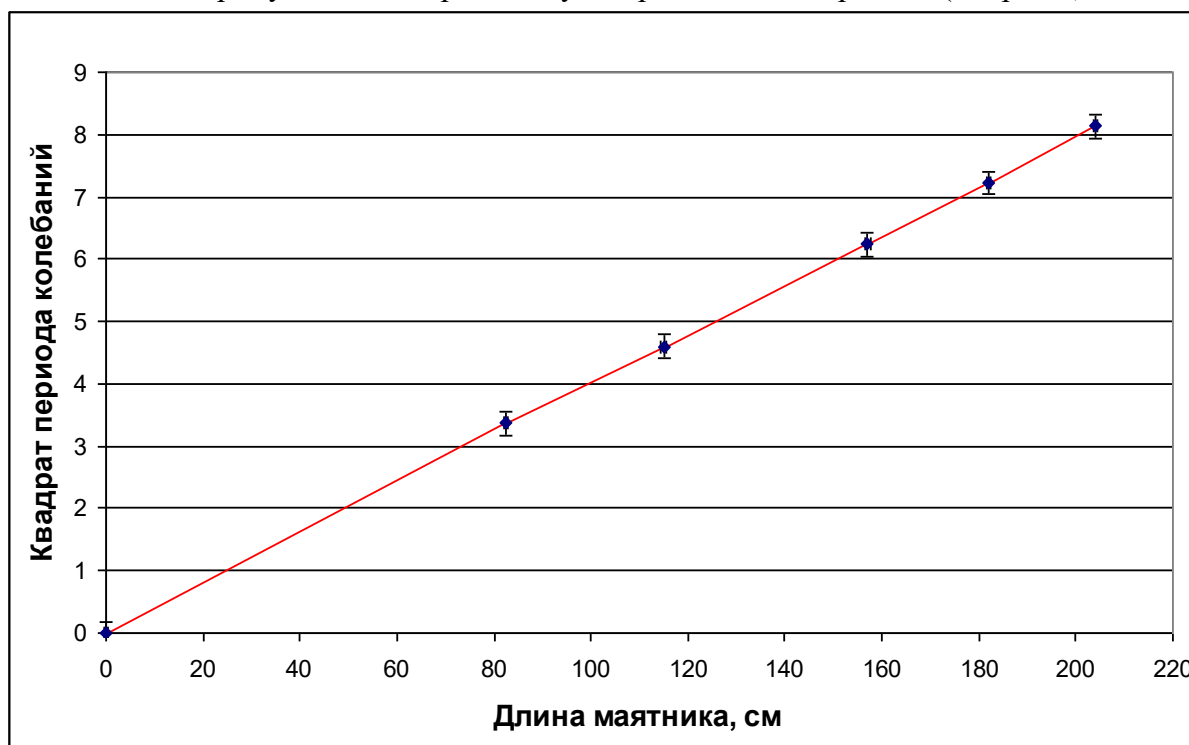


Рисунок 8. Зависимость квадрата периода колебаний математического маятника от его длины. Показана линия тренда, проведенная через начало координат и экспериментальные точки.

Таким образом, экспериментальные результаты подтверждают справедливость теоретической формулы (1), полученной на основе классических законов механики Ньютона.

## Заключение

Главным результатом работы является подтверждение закономерностей движения математического маятника, полученных на основе законов классической механики. А именно, в пределах погрешности эксперимента, период колебаний маятника не зависит от массы груза и величины начального малого отклонения. Показано, что зависимость периода колебаний от длины нити имеет вид  $T^2 \sim l$ .

## Список использованной литературы

1. <https://www.yaklass.ru/p/fizika/9-klass/mekhanicheskie-kolebaniia-zvukovye-volny-18755/kolebatelnaiia-sistema-kolebaniia-gruza-na-pruzhine-matematicheskii-maiat -150745/re-6699608f-8fcb-480f-a071-f4176503f440> (свободный, 01.03.2021)
2. [https://ru.wikipedia.org/wiki/Математический\\_маятник](https://ru.wikipedia.org/wiki/Математический_маятник) (свободный, 01.03.2021)
3. Вечеславов В.В. Хаотический слой маятника при низких и средних частотах возмущений // Журнал технической физики. — 2004. — Т. 74, № 5. — С.1—5.
4. <http://ru.solverbook.com/spravochnik/mexanika/mexanicheskie-kolebaniya-i-volny/matematicheskij-mayatnik/> (свободный, 01.03.2021)
5. Яворский Б.М., Селезнев Ю.А. Физика. Справочное руководство: Для поступающих в вузы. М.: Наука. – 1979. - 512с.
6. Лабораторный практикум по общей физике. Том 1. Механика. Под редакцией проф. А.Д. Гладуна. М.: МФТИ. - 2012. - 316с.