

**Автономная некоммерческая общеобразовательная
организация "Физтех-лицей"
(АНОО «Физтех-лицей» им. П.Л. Капицы)**

XX научно-практическая конференция

«Старт в инновации»

Связанные осцилляторы, биения

Выполнили:
Ерин Вадим 10А
Руководитель:
Иголевич И.А.

Московская область, г. Долгопрудный

2021 г.

Введение

Если колебательная система имеет несколько степеней свободы, то ее выведение из равновесия по одной из них может привести к возникновению колебаний по другим степеням свободы, при этом возникают биения. Биения — явление, возникающее при наложении двух периодических колебаний, например, гармонических, близких по частоте, выражающееся в периодическом уменьшении и увеличении амплитуды суммарного сигнала.[1]

Цель работы: Получение зависимости периода биений от периодов колебаний взаимодействующих мод колебательной системы на примере крутильного маятника.

Задачи работы:

- Измерение периодов продольных и крутильных колебаний установки в зависимости от момента инерции крутильного маятника;
- Предложение теоретической зависимости периода биений от измеренных ранее параметров;
- Экспериментальное получение искомой зависимости;
- Сравнение теоретических и практических результатов.

Теоретическая часть

Рассмотрим систему, которая может совершать гармонические колебания по двум степеням свободы. В простейшем случае моды не взаимодействуют, и эволюция системы описывается двумя независимыми дифференциальными уравнениями:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = 0 \\ \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = 0 \end{cases}$$

q_1, q_2, ω_1 и ω_2 – координаты, по которым происходят колебания, и соответствующие им циклические частоты.

Если моды взаимодействуют, то мы получаем тоже систему линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, но они уже не будут независимыми. В решении получаем, что зависимость каждой координаты от времени является суммой гармонических колебаний с разными частотами, эти частоты называются собственными для системы. Можно выбрать такие приведённые координаты, что колебания по ним будут независимыми, но они не всегда являются удобными для измерения.

Рассмотрим сумму двух гармонических колебаний. Для удобства и наглядности будем использовать векторные диаграммы.

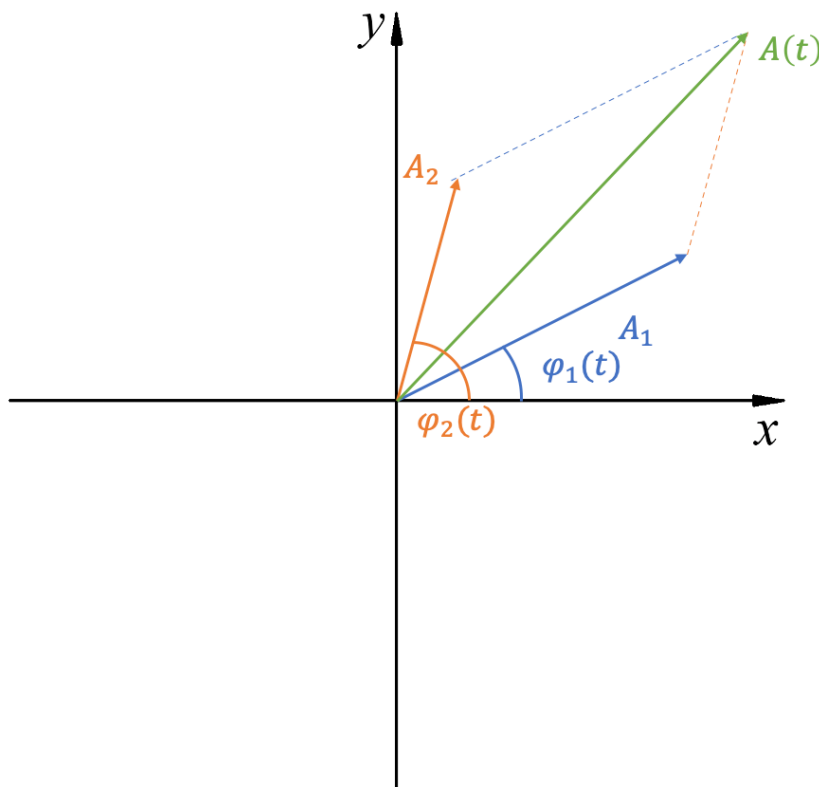


Диаграмма 1

Суммарное колебание:

$$q(t) = A_1 \cos \varphi_1(t) + A_2 \cos \varphi_2(t)$$

Где:

$$\varphi_1(t) = \omega_1 t + \varphi_{01}$$

$$\varphi_2(t) = \omega_2 t + \varphi_{02}$$

$$q(t) = A(t) \cos \varphi(t)$$

Используя векторную диаграмму и теорему косинусов, можно заметить, что:

$$A(t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi(t)}$$

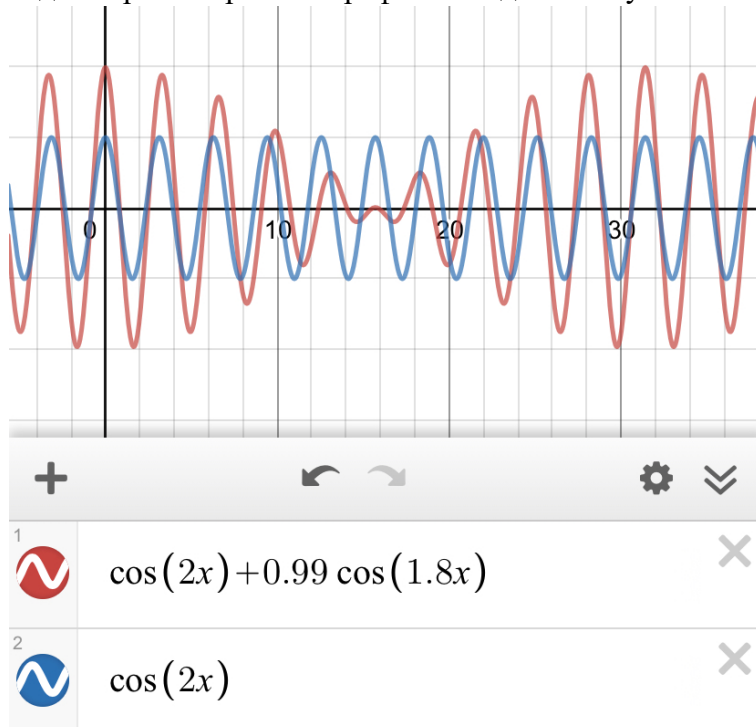
$$\Delta\varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t) = (\omega_1 - \omega_2)t + (\varphi_{01} - \varphi_{02})$$

$$\tan \varphi(t) = \frac{A_1 \sin \varphi_1(t) + A_2 \sin \varphi_2(t)}{A_1 \cos \varphi_1(t) + A_2 \cos \varphi_2(t)}$$

Как мы видим, амплитуда суммарного колебания может меняться от модуля разности амплитуд слагаемых до их суммы. При этом период биений:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}$$

Формула для фазы колебаний сложна. Но можно рассмотреть отдельные варианты. По векторной диаграмме видно, что если одна из амплитуд больше другой, то в среднем частота суммарного биения равна частоте большего колебания. Пример этого можно видеть при построении графиков подобных сумм колебаний:



Несложно заметить, что количество колебаний суммарного колебания и колебания с большей амплитудой за один период биения равны.

Если амплитуды складываемых колебаний равны, то мы можем преобразовать сумму, используя тригонометрию:

$$q(t) = A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A \cos(\omega_2 t + \varphi_2) = A_0(t) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$$

Где:

$$A_0(t) = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)$$

Заметим, что период биений равен половине периода функции, которая описывает амплитуду колебания, так как мы можем наблюдать только модуль этой функции, что увеличивает наблюдаемую частоту вдвое.

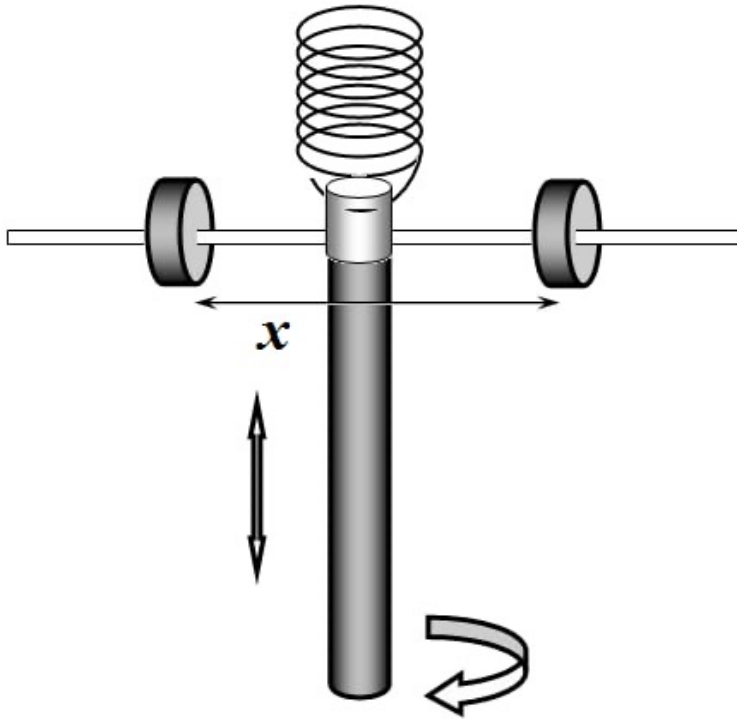


Рисунок 1

Перейдём к нашей установке (рисунок 1). Положение маятника можно описывать двумя координатами: изменением угла поворота и положением по вертикали относительно равновесия. Соответствующие моды колебаний могут взаимодействовать, и при близких их частотах можно наблюдать биения. Попробуем построить модель, описывающую этот эффект.

Для начала рассмотрим, что будет происходить при невзаимодействующих модах. Тогда система дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \ddot{y} + \frac{k}{m}y = 0 \\ \ddot{\theta} + \frac{k'}{I}\theta = 0 \end{cases}$$

k – коэффициент жёсткости пружины, m – масса маятника, k' – отношение момента сил, возникающих при повороте пружины, к углу поворота, I – момент инерции маятника.

Для понимания, почему эта система не является верной, рассмотрим механизм деформации пружины.

Продольные колебания происходят в результате сил, действующих вдоль пружины.

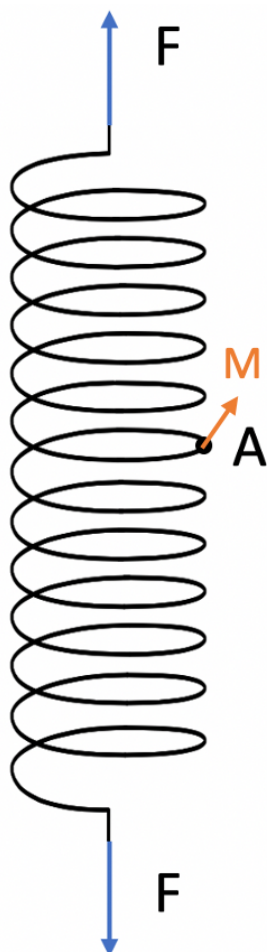


Рисунок 2

Выберем точку A на пружине. Мы можем мысленно разбить пружину в этой точке на две части. Рассматривая одну из этих частей, можно заметить, что относительно точки A на неё действует момент сил, который направлен горизонтально по касательной (если силы лежат не на оси пружины, то это может не выполняться, но для разных частей пружины радиальные компоненты момента разные, и при усреднении они дадут 0 в отличие от касательных составляющих) к цилиндрической поверхности, вдоль которой идёт пружина (на рисунке 3 указан момент на верхнюю часть пружины).

Крутильные колебания являются результатом сил, момент которых направлен вертикально. Соответственно и момент сил, действующий на участок пружины, направлен вертикально.

Рассмотрим отдельный участок проволоки, из которой сделана пружина. На него действует какой-то момент сил, вызывающий деформацию. Как мы выяснили, этот момент при разных типах колебаний может быть горизонтальным и вертикальным (при колебаниях сразу двух параметров системы суммарную деформацию можно рассматривать как суперпозицию отдельных деформаций, вызываемых отдельными силами и их моментами). Разобьём его вектор на две составляющие: первая направлена вдоль проволоки, а вторая – перпендикулярно её оси (разбиения для рассматриваемых направлений момента сил представлены на рисунках 3 и 4).

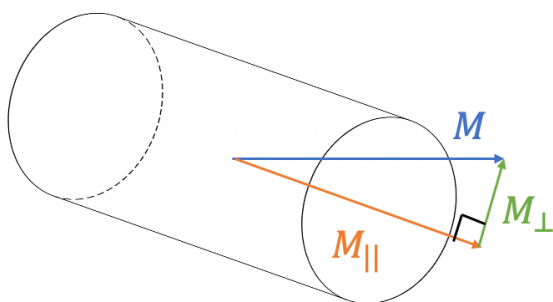


Рисунок 3

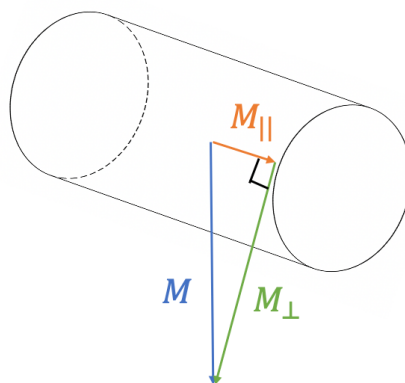


Рисунок 4

Несложно заметить, что момент сил, перпендикулярный оси проволоки, будет изменять её радиус кривизны, не изменяя при этом угол между осью и вертикалью, то есть нижняя точка пружины не изменит своей высоты, но при этом она повернётся, так как радиус кривизны

изменился при неизменной длине, а значит, угол поворота (дробное количество витков) изменился.

Момент сил, направленный вдоль проволоки, будет её закручивать вдоль оси, что приводит только к изменению высоты нижней точки, но не повлияет на угол поворота пружины. В этом несложно убедиться, если рассмотреть закручивание на один угол противоположных небольших участков проволоки одного витка. При этом половина витка наклоняется, при неизменной ориентации в пространстве остальных частей пружины (рисунок 5).

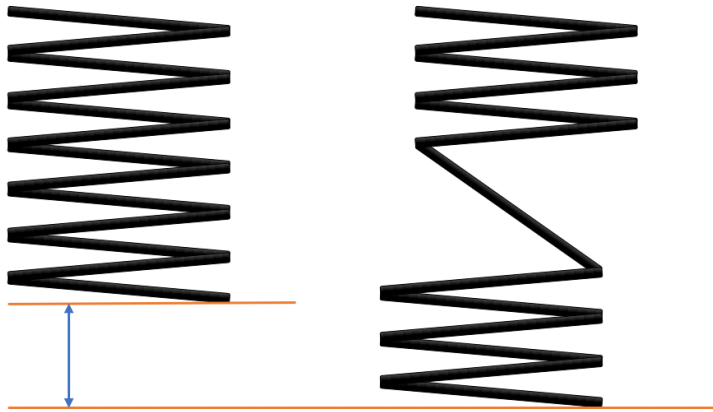


Рисунок 5

Таким образом, на изменение координат системы влияют не горизонтальный и вертикальный моменты, которые мы видим в колебании маятника, а моменты вдоль оси и перпендикулярно этой оси. Таким образом, если проволока пружины расположена под углом, отличным от нуля, то при колебании по одной координате будет существовать составляющая момента, запускающая изменение другой координаты. Получается, что данные моды будут взаимодействовать. Пронаблюдаем это в ходе экспериментов.

Практическая часть



Данный крутильный маятник состоит из тяжёлого цилиндрического стержня, в который вставлена спица, по которой можно перемещать гайки, меняя момент инерции системы. Такой маятник может совершать различные колебания, нас интересуют продольные (изменение положение по вертикали) и крутильные (изменение угла поворота вокруг оси цилиндра).

Измерим период продольных колебаний маятника (он зависит только от массы маятника и не зависит от положения гаек). Для этого замерим время 30 колебаний и разделим его на 30. Для большей точности проведём эксперимент три раза. Результаты приведены в таблице 1.

Период крутильных колебаний зависит от момента инерции маятника, поэтому мы будем измерять время 30 колебаний для разных значений параметра x (расстояние между гайками), каждое измерение будем делать дважды. Результаты приведены в таблице 2.

Нужно заметить, что эти измерения мы будем проводить, следя, чтобы период исследуемого колебания слабо менялся от времени, тогда мы сможем найти частоту конкретной моды, пренебрегая другими, так как их амплитуда будет вносить небольшой вклад, который слабо повлияет на точность измерений.

При тех же значениях x будем измерять ещё и период биений. Для этого будем запускать продольные колебания с достаточно большой амплитудой, при этом возникают заметные крутильные колебания, амплитуда которых меняется периодически от 0 до достаточно большого заметного значения. Период биений – время между двумя минимумами амплитуды. Изначально измерим 5 периодов, все опыты повторяя дважды. Результаты запишем в таблицу 3.

Интересным является то, что изначально угол поворота относительно равновесия и угловая скорость маятника равны нулю, то есть изначально амплитуда крутильных колебаний равна

нулю. Так как мы рассматриваем две моды системы, функция угла поворота от времени должна являться суммой двух гармонических колебаний. При этом амплитуда суммарного колебания может обращаться в ноль только при одном условии: амплитуды двух суммируемых колебаний равны.

Исходя из нашей теории циклическая частота изменения амплитуды равна полуразности частот отдельных колебаний. Обозначим: T_1 и T_2 – периоды продольных и крутильных колебаний соответственно, а ω_1 и ω_2 – их циклические частоты соответственно. T, ω – период и частота биений.

Угол поворота маятника от времени:

$$\theta(t) = A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A \cos(\omega_2 t + \varphi_2) = A_0(t) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$$

Где:

$A_0(t) = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)$ – амплитуда суммарного колебания.

$$\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$$

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}$$

$$\omega = \frac{\pi}{T}$$

Запишем то, что частота биений равна полусумме частот биений, выражая их через измеряемые времена:

$$\frac{\pi}{T} = \frac{\frac{2\pi}{T_1} - \frac{2\pi}{T_2}}{2}$$

Это равносильно:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}$$

Чтобы проверить теорию, построим график $\frac{1}{T} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)$. Таблица данных для графика и сам график находятся в приложении (таблица 4 и график 1).

График представляет собой прямую, коэффициент наклона которой равен 1, что полностью согласуется с теорией.

Заключение

Мы смогли сделать теоретическую модель, которая качественно и количественно может описать поведение колебательной системы с несколькими степенями свободы. Эксперимент подтверждает наши предположения, его результаты абсолютно согласуются с теорией.

Список литературы:

1. Википедия <https://ru.wikipedia.org/wiki/Биения>
2. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теоретическая физика
3. Сивухин Д.В. Общий курс физики

Приложения

Таблица 1, измерение периода продольных колебаний.

№	$T_{30}, \text{с}$	$T, \text{с}$
1	28,53	0,95266667
2	28,62	
3	28,59	

Таблица 2, измерение периода крутильных колебаний.

№	$x, \text{мм}$	$T_{301}, \text{с}$	$T_{302}, \text{с}$	$T, \text{с}$
1	43	31,06	31,12	1,03633333
2	45	31,09	31,37	1,041
3	47	31,29	31,37	1,04433333
4	50	31,5	31,57	1,05116667
5	53	31,78	31,75	1,05883333
6	55	32,06	31,78	1,064
7	58	32,03	32,09	1,06866667
8	60	32,28	32,35	1,07716667
9	63	32,63	32,5	1,0855
10	65	32,69	32,65	1,089
11	68	32,93	32,91	1,09733333
12	70	33,18	33,1	1,10466667
13	73	33,47	33,15	1,11033333
14	75	33,53	33,6	1,11883333
15	77	33,78	33,88	1,12766667
16	80	33,97	34	1,13283333
17	83	34,22	34,21	1,1405
18	85	34,38	34,39	1,14616667
19	87	34,56	34,72	1,15466667
20	90	35,03	35,03	1,16766667
21	93	35,5	35,41	1,18183333
22	95	35,66	35,73	1,18983333
23	97	35,63	35,78	1,19016667
24	100	36,19	35,87	1,201
25	103	36,81	36,81	1,227
26	105	36,87	37,06	1,23216667
27	107	37,13	37,25	1,23966667
28	110	37,5	37,37	1,24783333
29	112	37,6	37,63	1,25383333
30	115	37,97	38	1,26616667
31	117	38,4	38,34	1,279
32	120	38,78	38,78	1,29266667
33	122	39,03	39,05	1,30133333
34	125	39,18	39,2	1,30633333
35	127	39,63	39,57	1,32

36	130	39,72	39,97	1,32816667
37	132	40,25	40,3	1,3425
38	135	40,46	40,8	1,35433333
39	137	40,83	40,91	1,36233333
40	140	41,47	41,43	1,38166667
41	142	41,59	41,61	1,38666667
42	145	42,19	42,09	1,40466667
43	147	42,6	42,44	1,41733333
44	150	42,69	42,75	1,424
45	152	42,87	42,93	1,43
46	155	43,34	43,18	1,442
47	157	43,7	43,54	1,454
48	160	44,12	44,09	1,47016667
49	162	44,53	44,53	1,48433333
50	165	45	45,14	1,50233333

Таблица 3, измерение периода биений.

№	x , мм	T_{301} , с	T_{302} , с	T , с
1	43	55,53	55,88	11,141
2	45	51,62	52	10,362
3	47	51,02	50,97	10,199
4	50	48,53	48,21	9,674
5	53	45,75	45,47	9,122
6	55	43,69	43,75	8,744
7	58	42,56	42,75	8,531
8	60	40,4	40,34	8,074
9	63	37,97	38,41	7,638
10	65	36,75	36,81	7,356
11	68	35,48	35,47	7,095
12	70	33,56	33,54	6,71
13	73	32,35	32,81	6,516
14	75	31,13	32,15	6,328
15	77	30,53	31,25	6,178
16	80	29,5	29,31	5,881
17	83	28,34	28,78	5,712
18	85	27,35	27,66	5,501
19	87	26,53	26,81	5,334
20	90	26,03	25,87	5,19
21	93	25,15	24,46	4,961
22	95	23,97	24,03	4,8
23	97	23,94	23,59	4,753
24	100	23,47	22,97	4,644
25	103	21,41	21,37	4,278
26	105	20,53	20,93	4,146

27	107	20,59	20,41	4,1
28	110	20,12	20,12	4,024
29	112	19,87	19,75	3,962
30	115	19,44	19,12	3,856
31	117	18,59	18,68	3,727
32	120	18,5	17,94	3,644
33	122	17,65	17,43	3,508
34	125	17,28	17,53	3,481
35	127	17,22	17,28	3,45
36	130	16,91	17,04	3,395
37	132	16,41	16,5	3,291
38	135	16,28	16,19	3,247
39	137	15,47	16	3,147
40	140	15,22	15,22	3,044
41	142	15,34	15,08	3,042
42	145	14,56	14,57	2,913
43	147	14,57	14,5	2,907
44	150	14,53	14,4	2,893
45	152	14,04	14,19	2,823
46	155	13,68	13,91	2,759
47	157	13,7	13,81	2,751
48	160	13,6	13,63	2,723
49	162	13,31	13,33	2,664
50	165	13,03	13,05	2,608

Таблица 4, данные для графика.

№	$\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}, \text{с}^{-1}$	$\frac{1}{T}, \text{с}^{-1}$
1	0,0847446	0,08975855
2	0,0890703	0,09650647
3	0,09213642	0,09804883
4	0,09836117	0,10336986
5	0,10524939	0,10962508
6	0,10983547	0,11436414
7	0,11393962	0,11721955
8	0,12132365	0,12385435
9	0,12845064	0,13092433
10	0,13141145	0,13594345
11	0,13838497	0,14094433
12	0,14443464	0,1490313
13	0,14905465	0,15346839
14	0,15589692	0,15802781
15	0,16289822	0,16186468

16	0,16694271	0,17003911
17	0,17287668	0,17507003
18	0,17721163	0,18178513
19	0,18363429	0,18747657
20	0,1932763	0,19267823
21	0,2035421	0,20157226
22	0,20923125	0,20833333
23	0,20946664	0,21039344
24	0,21704563	0,21533161
25	0,23468917	0,23375409
26	0,23810657	0,24119633
27	0,24301664	0,24390244
28	0,24829602	0,24850895
29	0,25213093	0,25239778
30	0,25989965	0,2593361
31	0,26782427	0,26831232
32	0,27609046	0,27442371
33	0,28124247	0,28506271
34	0,28418369	0,28727377
35	0,29210934	0,28985507
36	0,29676754	0,29455081
37	0,30480614	0,30385901
38	0,31131443	0,30797659
39	0,31565035	0,31776295
40	0,32592152	0,32851511
41	0,32853125	0,3287311
42	0,33777242	0,34328871
43	0,34413477	0,34399725
44	0,3474379	0,34566194
45	0,3503844	0,35423309
46	0,35620382	0,36245016
47	0,36192719	0,36350418
48	0,36949011	0,36724201
49	0,37598197	0,37537538
50	0,38405385	0,38343558

График 1.

