

Автономная некоммерческая общеобразовательная организация "Физтех-лицей"

(АНОО «Физтех-лицей» им. П.Л. Капицы)

XX научно-практическая конференция

«Старт в инновации»

«Вписанный четырехугольник»

Выполнили:

Бочкова Валерия 7 А класс

Воробьёва Александра 7 А класс

Руководитель:

Вишневецкая Вера Петровна

Московская область, г. Долгопрудный

Оглавление

Введение	3
Цель:.....	3
Задачи:	3
Признаки вписанного четырёхугольника.....	4
Свойства вписанного четырёхугольника.....	6
Формула Брахмагупты	8
Теорема Птолемея.....	9
Формула Парамешвары.....	10
Решение задач	11
Опрос	15
Урок.....	16
Заключение.....	17
Список используемой литературы	17

Введение

Вписанные многоугольники изучаются с 8 класса. В основном преобладают задачи на вписанный треугольник, так как любой треугольник можно вписать в окружность. Задачи на вписанный четырехугольник чаще встречаются в олимпиадных заданиях. Очевидно, что около прямоугольника, квадрата, равнобедренной трапеции можно описать окружность. В остальных случаях имеет место признак вписанного четырехугольника, который говорит о том, что сумма противоположных углов должна равняться 180° .

«Вписанный четырехугольник в задачах возникает как-то «вдруг», демонстрируя взаимосвязь, гармонию геометрических объектов» (Г.И.Саранцев).

Вписанные углы, угол между касательным и секущим, внешние углы все взаимосвязаны со вписанным четырехугольником.

Проблема заключается в том, что в задачах эти и другие объекты комбинированы по-разному, поэтому увидеть нужную ситуацию бывает сложно. В поисках решения данной проблемы нужно вокруг задачи о вписанном четырехугольнике конкретизировать и обобщить необходимые сведения в виде блока полезных фактов для решения задач на данную тематику

Цель:

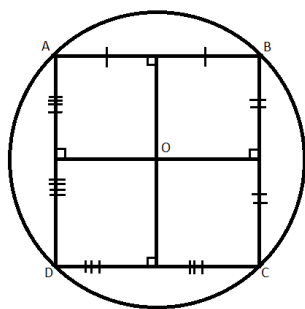
Изучить и применить на практике признаки и свойства вписанного четырёхугольника.

Задачи:

1. Познакомиться с вписанным четырёхугольником.
2. Найти и понять признаки и свойства вписанного четырёхугольника.
3. Применить изученные признаки при решении задач.
4. Познакомиться с теоремой Птолемея и научиться ей пользоваться.
5. Научиться использовать формулу Брахмагупты в решении геометрических задач.
6. Понять, что такое формула Парамешвары и научиться её использовать.

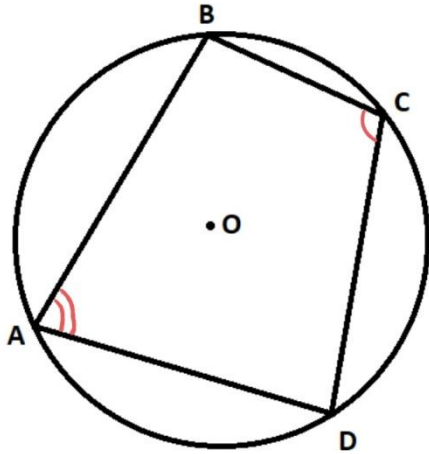
Предполагаемый результат: мы узнаем о свойствах и признаках вписанного четырёхугольника и научимся ими пользоваться.

Сначала дадим определение вписанного четырехугольника. Вписанный четырёхугольник - это четырехугольник, все вершины которого принадлежат данной окружности, такую окружность называют описанной. Центр окружности, описанной около четырехугольника, — точка пересечения серединных перпендикуляров, проведенных ко всем его сторонам.



Признаки вписанного четырёхугольника

1. Сумма противоположных углов вписанного четырёхугольника равна 180° .

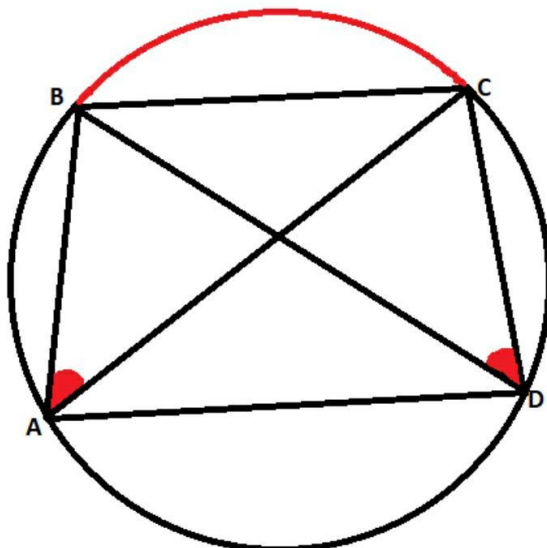


Пусть в окружность с центром в точке O вписан четырёхугольник $ABCD$. Требуется доказать, что $\angle A + \angle C = 180^\circ$ и $\angle B + \angle D = 180^\circ$. $\angle A$, как вписанный в окружность с центром O , измеряется $\frac{1}{2}$ $\cup$ BCD (по теореме о вписанном угле: если угол вписанный в окружность, то его градусная мера равна половине дуги, на которую он опирается). $\angle C$, как вписанный в ту же окружность, измеряется $\frac{1}{2}$ $\cup$ BAD .

Следовательно, сумма углов A и C измеряется полусуммой дуг BCD и BAD в сумме же эти дуги составляют окружность, т. е. имеют $360^\circ \Rightarrow \angle A + \angle C = 360^\circ : 2 = 180^\circ$.

$\angle B + \angle D = 180^\circ \Rightarrow$ доказательство аналогично тому что $\angle A + \angle C = 180^\circ$. Однако это можно вывести и иным путём. Мы знаем, что сумма внутренних углов выпуклого четырёхугольника равна 360° . Сумма углов A и C равна 180° , значит, на сумму других двух углов четырёхугольника остаётся тоже 180° .

2. Углы, опирающиеся на одну сторону равны.



$$\angle BAC = \angle CDB.$$

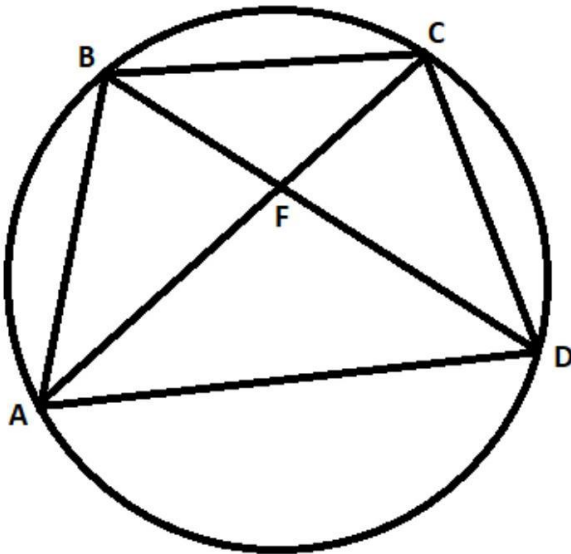
3. $AF \cdot FC = BF \cdot FD$ (F-точка пересечений диагоналей четырёхугольника ABCD)

доказательство теоремы: произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.

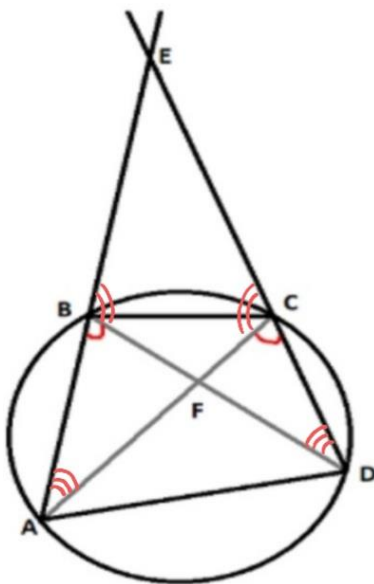
Для двух хорд AC и BD, пересекающихся в точке F, выполняется следующее равенство:

$$AF \cdot FC = BF \cdot FD$$

Обратное тоже верно, то есть если для двух отрезков AC и BD, пересекающихся в точке F, вышеприведённое равенство выполняется, то их конечные точки A, B, C и D лежат на одной окружности. Или, другими словами, если диагонали четырёхугольника ABCD пересекаются в точке F и выполняется вышеупомянутое равенство, то этот четырёхугольник является вписанным.

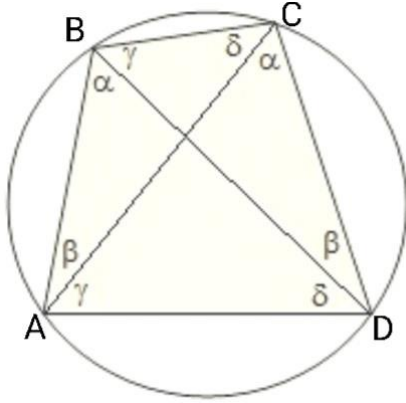


4. $EA \cdot EB = EC \cdot ED$ (E-точка пересечений прямых AB и CD. Это следует из подобия треугольников: $\triangle AEC \sim \triangle BED$ по 2 углам: $\angle E$ -общий, $\angle EAC = \angle CDB$ как углы, которые опираются на дугу BC) $\Rightarrow EA:ED = EC:BE \Rightarrow EA \cdot EB = EC \cdot ED$.



5. Если угол между стороной и диагональю четырёхугольника равен углу между другой диагональю и противоположной стороной, то около этого четырёхугольника можно описать окружность.

Для треугольников ABD и ACD радиус описанной окружности одинаков, при этом они имеют общую сторону AD, значит их центры описанных окружностей совпадают, следовательно, около четырёхугольника ABCD можно описать окружность.



Свойства вписанного четырёхугольника

Свойство 1. Если параллелограмм вписан в окружность, то это прямоугольник.

Определение: Параллелограмм — это четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны, то есть лежат на параллельных прямых.

Предположим, что нам как-то удалось посадить на параллелограмм ABCD окружность. Тогда непременно должно быть: $\alpha + \beta = 180^\circ$, то есть $\angle B + \angle D = 180^\circ$.

А теперь вспомним о свойствах параллелограмма: у всякого параллелограмма противоположные углы равны.

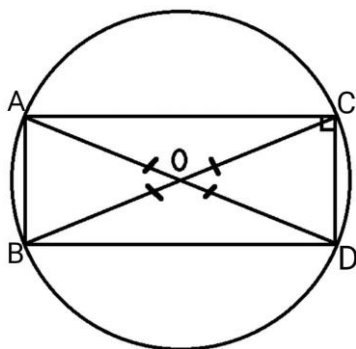
То есть $\angle B = \angle D$. У нас получилось, что

$$\angle B = \angle D, \angle B + \angle D = 180^\circ \Rightarrow \angle B = 90^\circ, \angle D = 90^\circ.$$

$$ABCD - \text{вписанный} \Rightarrow \angle A + \angle C = 180^\circ \Rightarrow \angle A = 90^\circ$$

$$ABCD - \text{параллелограмм} \Rightarrow \angle A = \angle C \Rightarrow \angle C = 90^\circ$$

Получилось, что если параллелограмм вписан в окружность, то все его углы равны 90° , то есть это прямоугольник.

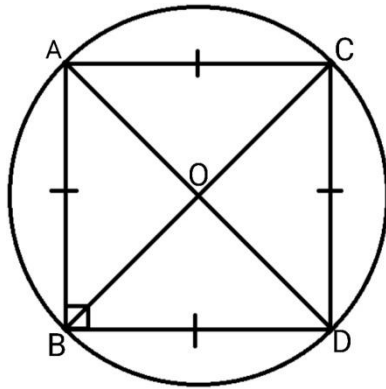


И ещё при этом – центр окружности совпадает с точкой пересечения диагоналей этого прямоугольника.

Это, так сказать, в качестве бонуса прилагается.

Свойство 2. Окружность можно описать около ромба тогда и только тогда, когда ромб является квадратом.

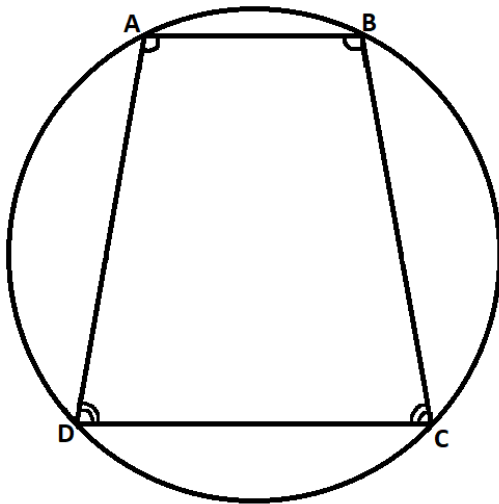
Определение: Ромб — это параллелограмм, у которого все стороны равны.



Свойство 3. Окружность можно описать около трапеции тогда и только тогда, когда трапеция является равнобедренной трапецией.

Определение: трапеция - это выпуклый четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны.

А теперь поговорим о трапеции. Что будет, если трапецию вписать в окружность? А оказывается, будет равнобедренная трапеция.



Вот пусть трапеция ABCD вписана в окружность.

Тогда $\angle B + \angle D = 180^\circ$, но из-за параллельности прямых AB и CD $\angle B + \angle C = 180^\circ$ (односторонние при $AB \parallel CD$ и секущей BC).

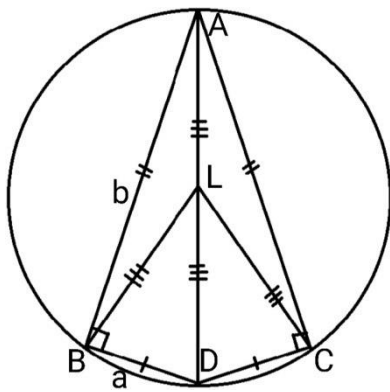
Значит, имеем: $\angle B + \angle D = 180^\circ$, $\angle B + \angle C = 180^\circ \Rightarrow \angle D = \angle C \Rightarrow$ трапеция равнобокая.

Трапеция, вписанная в окружность – равнобедренная.

Свойство 4. Окружность можно описать около дельтоида тогда и только тогда, когда дельтоид состоит из двух одинаковых прямоугольных треугольников (ABCD-дельтоид, так как $AB=AC$ и $BD=DC$).

Определение: Дельтоид — четырёхугольник, четыре стороны которого можно сгруппировать в две пары равных смежных сторон.

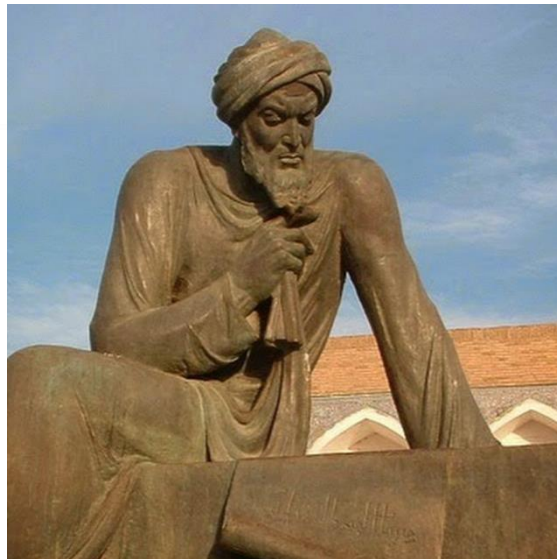
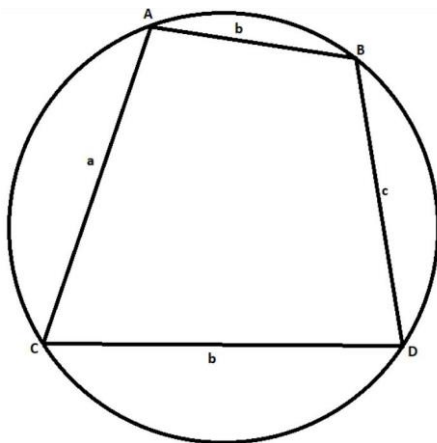
Радиус окружности, которая описана вокруг дельтоида можно вычислить через 2 его разные стороны: $R = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$



Формула Брахмагупты

Самый известный результат Брахмагупты в геометрии - это его формула для циклических четырехугольников. Учитывая длины сторон любого вписанного четырехугольника, Брахмагупта дал приближительную и точную формулу для площади фигуры.

В Евклидовой геометрии, циклическим четырехугольником называют четырёхугольник вершины, которого все лежат на единственном круге.



Площадь произвольного вписанного четырёхугольника можно найти по формуле Брахмагупты:

где a , b , c , d – длины сторон четырёхугольника, p – полупериметр четырёхугольника.

$$S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}$$

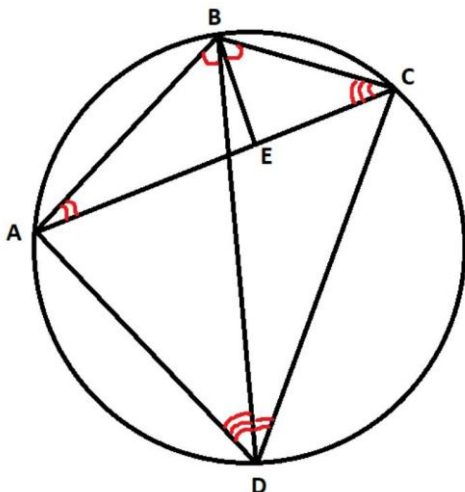
Теорема Птолемея

Произведение диагоналей вписанного четырёхугольника равно сумме произведений противоположных сторон.



Клавдий Птолемей

Рассмотрим произвольный четырёхугольник ABCD, вписанный в окружность.



Докажем, что справедливо равенство:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$

Для этого выберем на диагонали AC точку E так, чтобы угол ABD был равен углу CBE. Заметим, что треугольник ABD подобен треугольнику BCE. Действительно, у этих треугольников по два равных угла: угол ABD равен углу CBE (по построению точки E), угол ADB равен углу ACB (эти углы являются вписанными углами, опирающимися на одну и ту же дугу). Следовательно, справедлива пропорция:

$$BC:EC=BD:AD$$

откуда вытекает равенство:

$$BC \cdot AD = CE \cdot BD \quad (1)$$

Заметим, что треугольник ABE подобен треугольнику BCD. Действительно, у этих треугольников по два равных угла: угол ABE равен углу DBC (углы ABD и EBC равны по построению, угол DBE – общий), угол BAC равен углу BDC (эти углы являются вписанными углами, опирающимися на одну и ту же дугу). Следовательно, справедлива пропорция:

$$AB:AE=BD:CD$$

откуда вытекает равенство:

$$AB \cdot CD = AE \cdot BD \quad (2)$$

Складывая равенства (1) и (2), получаем:

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AE \cdot BD + CE \cdot BD = BD \cdot (AE + CE) = BD \cdot AC$$

Формула Парамешвары

Для вписанного четырёхугольника со сторонами a, b, c, d (в указанной последовательности) и полупериметром p задаётся формула для нахождения радиуса описанной около четырёхугольника окружности.

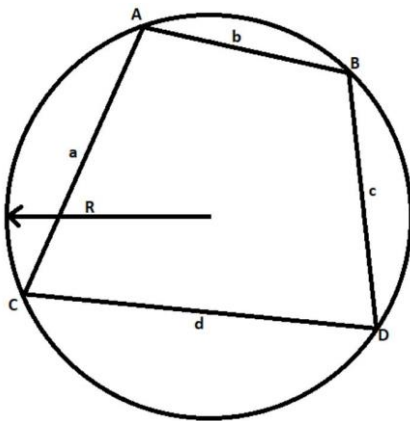
Формула была выведена индийским математиком Ватассери Парамешвара в 15 веке.

$$R = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)}{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}}$$

Используя формулу Брахмагупты, формулу Парамешвара можно преобразовать в

$$4SR = \sqrt{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)}$$

где S — площадь вписанного четырёхугольника.

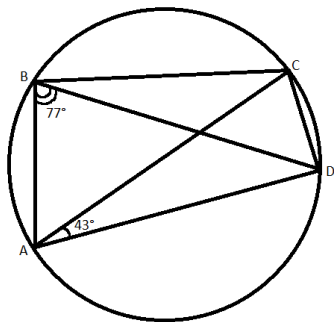


Решение задач

Изучив признаки и свойства вписанного в окружность четырёхугольника, мы можем применить их на практике.

Задача № 1.

Четырёхугольник ABCD вписан в окружность. Угол ABD равен 77° , угол CAD равен 43° . Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.



Решение.

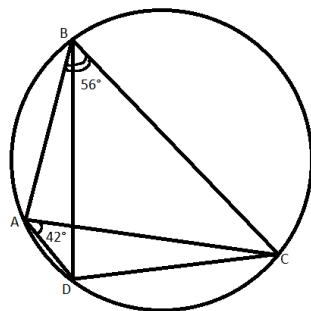
Угол CAD и угол CBD — вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, а значит, они равны 43° . Следовательно:

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD = 77^\circ + 43^\circ = 120^\circ.$$

Ответ: 120° .

Задача № 2.

Четырёхугольник ABCD вписан в окружность. Угол ABC равен 56° , угол CAD равен 42° . Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах.



Решение.

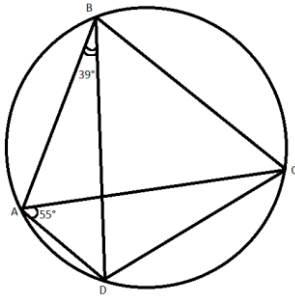
Угол CAD и угол CBD — вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, а значит, они равны 42° . Следовательно,

$$\angle ABD = \angle ABC - \angle CBD = 56^\circ - 42^\circ = 14^\circ.$$

Ответ: 14° .

Задача № 3.

Четырёхугольник ABCD вписан в окружность. Угол ABD равен 39° , угол CAD равен 55° . Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.



Решение.

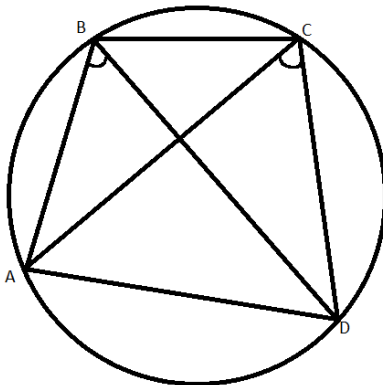
Угол CAD и угол CBD — вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, а значит, они равны 55° . Следовательно:

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD = 39^\circ + 55^\circ = 94^\circ.$$

Ответ: 94° .

Задача № 4.

В выпуклом четырёхугольнике ABCD углы ABD и ACD равны. Докажите, что углы DAC и DBC также равны.

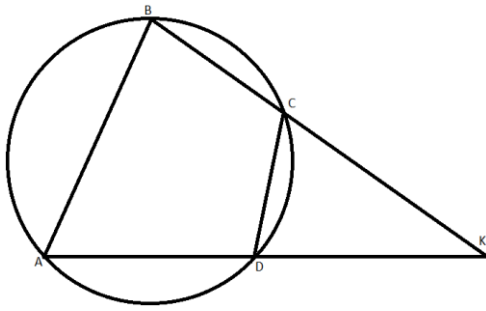


Доказательство.

Поскольку ABCD выпуклый и $\angle ABD = \angle ACD$, получаем, что около четырёхугольника ABCD можно описать окружность. А тогда $\angle DAC = \angle DBC$ как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу CD.

Задача № 5.

Известно, что около четырёхугольника ABCD можно описать окружность и что продолжения сторон AD и BC четырёхугольника пересекаются в точке K. Докажите, что треугольники KAB и KCD подобны.



Доказательство.

Поскольку четырёхугольник ABCD вписанный, сумма углов ABC и ADC равна 180° .

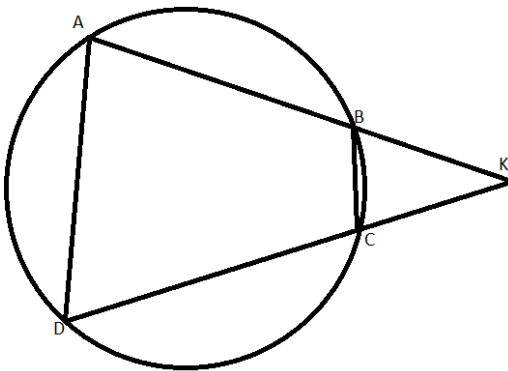
Следовательно,

$$\angle KDC = 180^\circ - \angle ADC = \angle ABC.$$

Получаем, что в треугольниках KAB и KCD углы $\angle ABK$ и $\angle CDK$ равны, угол K общий, следовательно, эти треугольники подобны.

Задача № 6.

Четырёхугольник ABCD вписан в окружность. Прямые AB и CD пересекаются в точке K, BK = 8 см, DK = 12 см, BC = 6 см. Найдите AD.



Решение.

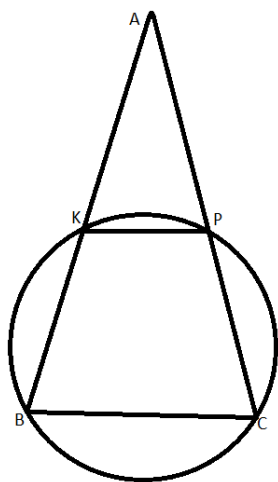
Если четырёхугольник вписан в окружность, то суммы величин его противоположных углов равны 180° , значит, $\angle DAB + \angle BCD = 180^\circ$, $\angle KCB + \angle BCD = 180^\circ$, так как они смежные, следовательно, $\angle KCB = \angle DAB$. Треугольники KCB и KAD подобны по двум углам ($\angle K$ — общий, $\angle KCB = \angle DAB$). Из подобия: $\frac{KB}{KA} = \frac{BC}{AD}$, поэтому

$$AD = \frac{KB \cdot BC}{KA} = \frac{8 \cdot 6}{12} = 4$$

Ответ: 4 см.

Задача № 7.

Окружность пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C. Найдите длину отрезка KP, если AK = 9, а сторона AC в 3 раза больше стороны BC.



Решение.

Поскольку четырёхугольник KPCB вписан в окружность, сумма противоположных углов равна 180° , следовательно, $\angle KBC + \angle KPC = 180^\circ$. Углы APK и KPC — смежные, следовательно, $\angle APK + \angle KPC = 180^\circ$. Из приведённых равенств получаем, что $\angle KBC = \angle APK$. Рассмотрим треугольники ABC и AKP, угол A — общий, углы APK и KBC равны, следовательно, треугольники подобны, откуда $KP : BC = AK : AC = AP : AB$. Используя равенство $AK : AC = KP : BC$ найдём KP. $AK : 3BC = KP : BC \Rightarrow KP = AK : 3 \Rightarrow KP = 3$

Ответ: 3.

Задача № 8.

Найдите площадь вписанного четырёхугольника со сторонами 4, 5, 7, 8.

Решение.

Вычислим площадь четырёхугольника по формуле Брахмагупты:

$$S = \sqrt{(\frac{a+b+c+d}{2} - a) \cdot (\frac{a+b+c+d}{2} - b) \cdot (\frac{a+b+c+d}{2} - c) \cdot (\frac{a+b+c+d}{2} - d)} = \sqrt{(12 - 4) \cdot (12 - 5) \cdot (12 - 7) \cdot (12 - 8)} = \sqrt{8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 4} = \sqrt{1120} = 33\sqrt{31}$$

Ответ: $33\sqrt{31}$

Задача №9.

Углы A, B и C четырёхугольника ABCD относятся как 1:2:3. Найдите угол D, если около данного четырёхугольника можно описать окружность. Ответ дайте в градусах.

Введем единичный угол. Тогда величины углов A, B и C можно записать так:

Угол $A=x$, угол $B=2x$, угол $C=3x$. Суммы противоположных углов вписанного четырёхугольника равны и равны 180° . Сумма углов A и C равна $4x$ и равна 180° . Отсюда $x=45^\circ$.

Очевидно, что величина угла D равна $4x-2x=90^\circ$

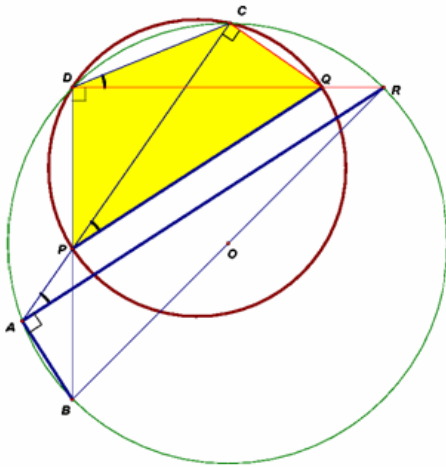
Ответ: 90° .

Задача №10.

Хорды AC и BD окружности пересекаются в точке P. Перпендикуляры к AC и BD в точках C и D, соответственно, пересекаются в точке Q. Докажите, что прямые AB и PQ перпендикулярны.

Решение.

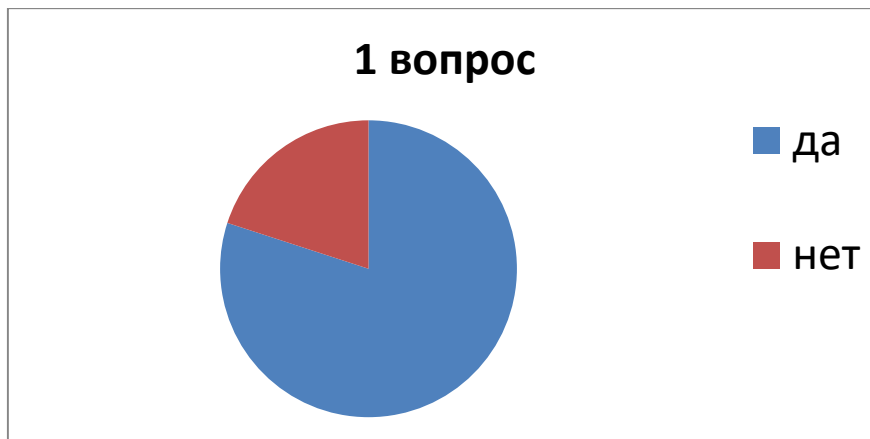
Пусть перпендикуляры пересекаются внутри окружности (случай внешней точки рассматривается аналогично). Отметим точку R — вторую точку пересечения прямой DQ с окружностью. Четырёхугольник $PDCQ$ вписан в окружность (он образован двумя прямоугольными треугольниками с общей гипотенузой PQ), поэтому углы CDQ и CPQ равны как опирающиеся на одну дугу. По этой же причине $\angle CDQ = \angle CAR$, и, значит, прямые PQ и AR параллельны (соответственные углы равны). Но BR является диаметром, как следует из перпендикулярности BD и DQ , поэтому $\angle BAR = 90^\circ$



Опрос

Мы провели опрос среди одноклассников. Результаты тестирования показаны на следующих диаграммах. В результате опроса мы выяснили, что многие не знакомы с темой вписанный четырёхугольник его свойства и признаки.

1 вопрос: Сталкивались ли вы когда-нибудь с терминами вписанный четырёхугольник и его признаки?



2 вопрос: Со сколькими признаками или свойствами вписанного четырехугольника вы знакомы?

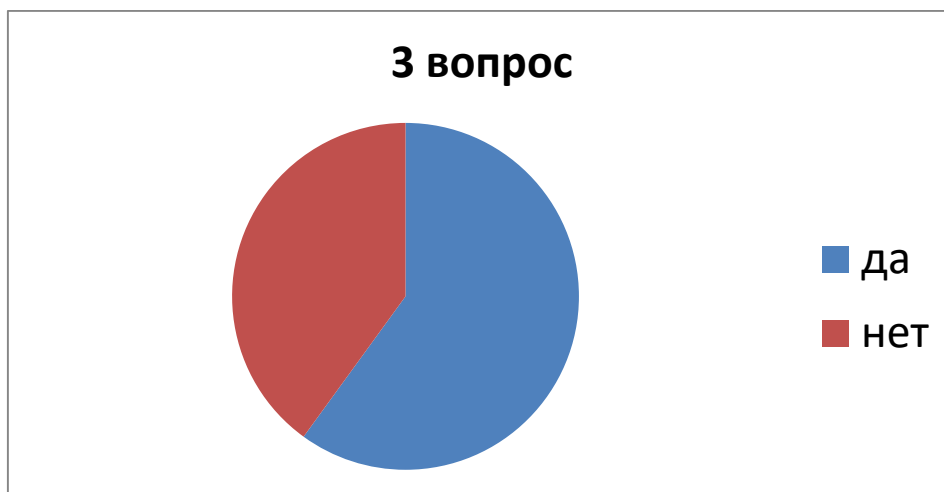
7 человек знакомы с признаками “Сумма противоположных углов вписанного четырёхугольника равна 180° ,” Углы, опирающиеся на одну сторону равны”.

5 человек знакомы со всеми свойствами вписанного четырёхугольника.

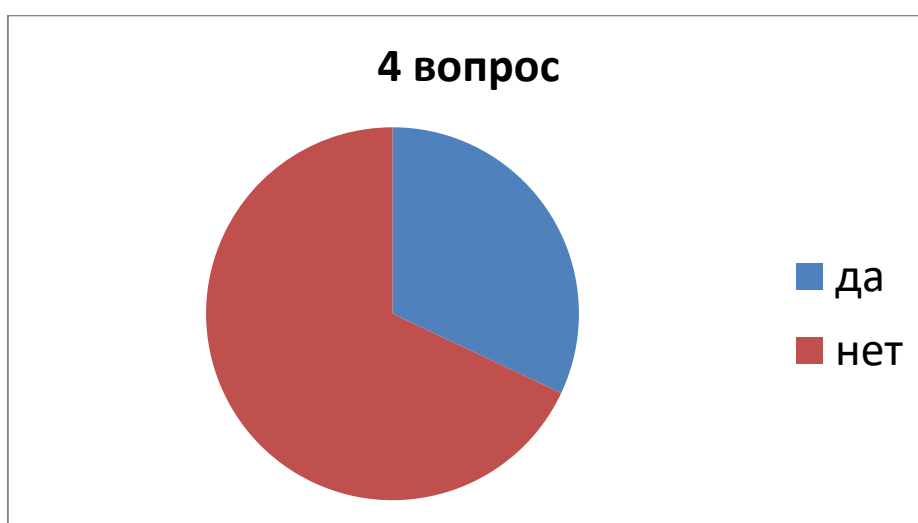
10 человек не знакомы ни с признаками и со свойствами.

2 человека знакомы со всеми признаками и свойствами вписанного четырёхугольника.

3 вопрос: знакомы ли вы с теоремой Птолемея (Произведение диагоналей вписанного четырёхугольника равно сумме произведений противоположных сторон).

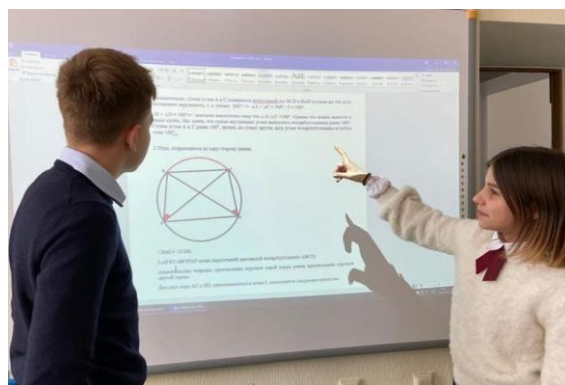


4 вопрос: Знаете ли вы как находить площадь вписанного четырёхугольника?



Урок

По итогам нашего опроса, мы выяснили, что большая часть нашего класса не знакома с этой темой. Поэтому мы решили провести урок и рассказать о вписанном четырёхугольнике и его признаках нашим одноклассникам.



Заключение

В результате нашей работы мы познакомились с признаками и свойствами вписанного четырёхугольника, изучили формулы Брахмагупты, Парамешвары и доказали теорему Птолемея. Так же мы провели опрос среди одноклассников. По результатам тестирования мы решили провести урок в классе и рассказать о признаках и свойствах вписанного четырёхугольника.

В ходе нашей исследовательской работы мы познакомились с материалом, который понадобится нам в 8 классе. Также мы прорешали множество геометрических задач. Нам эта тема показалась интересной и актуальной на данный момент.

Список используемой литературы

1. Учебник геометрии 7-9 класс под руководством А. И. Тихонова.
2. КВАНТ научно-популярный физико-математический журнал под руководством А. Л. Семенова.
3. https://yandex.ru/turbo/ru.wikipedia.org/s/wiki/Вписанный_четырёхугольник
4. https://oge.sdangia.ru/search?search=Четырёхугольник_abcd_вписан_в_окружность&page=2 обучающая система Дмитрия Гущева