Автономная некоммерческая общеобразовательная организация "Физтех-лицей"

(АНОО «Физтех-лицей» им. П.Л. Капицы)

XX научно-практическая конференция

«Старт в инновации»

Теория Математического бильярда

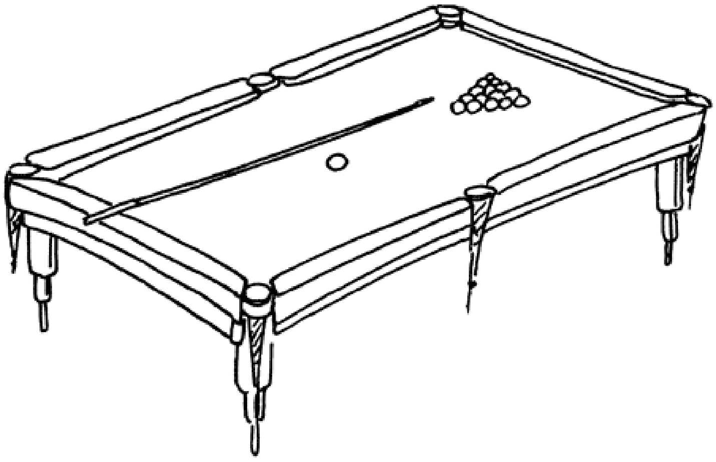
Выполнили:
Потапова Нина,Урнышева Арина, 9Г
Руководитель:
Потапова Татьяна Александровна

Московская область, г. Долгопрудный

2021 г.

Введение

Каждый знаком с классической игрой в бильярд, в которую входят кий, треугольник, бильярдные шары и бильярдный стол с лунками. Данная игра



имеет много разновидностей. Бильярд, подобно шахматам, является одной из древнейших игр, которая, по предположениям, появилась в Восточных странах еще до н.э, в Европе впервые она была упомянута в летописях VI века, а именно в Англии, в Россию же она была завезена из Голландии Петром I и сразу же заинтересовала ученых того времени. Исследование игры в бильярд привлекало многих физиков и математиков.О том, что у бильярда есть математические начала заговорил еще Кориолис,а после него данная игра стала предметом рассуждений и основой для многих исследований.Метод математического бильярда применим как в физике, для расчета траектории, рассмотрения различных вариантов движения шара в необычных условиях, так и в математике, например, для решения нестандартных задач, требующих особого метода, при помощи данного метода довольно легко можно решать нестандартные задачи, которые мы и рассмотрим впоследствии.

Математический бильярд также интересен и тем, что он разнообразен, то есть бильярдная плоскость может представлять собой, как и классический вариант, т.е. прямоугольник, так и круг, эллипс, многоугольники. Каждая из плоскостей интересна для исследований благодаря своим свойствам, отличительными особенностям, ведь в каждой из них бильярдный шар будет “вести себя” по-своему.

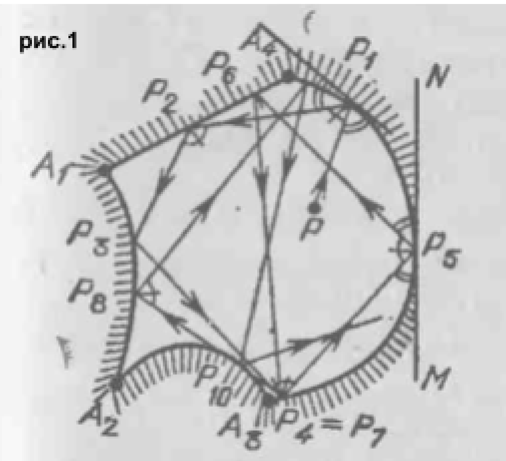
Что такое математический бильярд?

Математический бильярд - это замкнутая система, ограниченная бортами, произвольной формы без луз. По этому столу без трения движется точечный шар, абсолютно упруго отражающийся от бортов. Данный стол произвольной формы, встречаются такие , как эллиптические, округлые и др.

Траекторию бильярдного шара определяют:

- начальный вектор скорости шара
- начальное положение шара

Пренебрегая трением,можно говорить о том, что абсолютная величина скорости остается неизменной. Вектор скорости характеризуется только начальным направлением. После того, как шар ударяется о борт в какой-либо точке, он начнет двигаться по такой траектории, что угол под которым он ударяется о борт равен углу, под которым .Интересны такие случаи, когда борт является криволинейным, тогда углами падения и отражения можно назвать углы, составленные “падающими”и “отраженными” отрезками траектории к проведенной касательной к криволинейному борту в данной точке(см.рис.1).Можно заметить, что существуют такие точки на данной плоскости, после попадания в которые нельзя рассчитать дальнейшую траекторию движения шара, в данном случае таковыми точками являются т.А1,А2,А3,А4.Общей проблемой математического бильярда является описание возможных типов траекторий точечного шара в некой плоскости Q. Для удобства траектории точечного шара разделили на две категории: периодические и непериодические. Периодическая или замкнутая траектория - такая траектория,



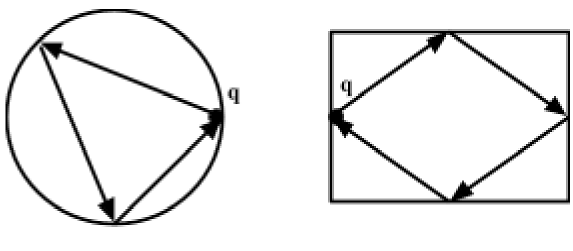


рис.2

при которой через некоторое количество времени точечный шар возвратится в свое изначальное положение с первоначальной скоростью(см.рис.2)

Метод математического бильярда в задачах

Метод математического бильярда интересен в задачах на переливания жидкости. Например, возьмем следующую задачу: За сколько ходов можно набрать ровно 4 литра воды, если иметь две емкости объемом по 3 и 5 литров?

Перед началом разбора задания стоит отметить, что у всех сосудов отсутствуют деления, вдобавок, при переливании нельзя использовать никакие из уловок.

Данную задачу несложно решить обычным способом - методом проб и ошибок. Тогда решение будет иметь следующий вид:

Первый шаг: наполнить водой сосуд с большим объемом

Второй шаг: из сосуда с большим объемом перелить 3 литра в меньший

Третий шаг: Из сосуда с меньшим объемом выльем всю воду

Четвертый шаг: Из сосуда с большим объемом перельем 2 литра воды в меньший

Пятый шаг: Нальем воду в первый сосуд, теперь получается так, что в одном 5 литров воды, а в другом 2 литра.

Шестой шаг:выльем из первого сосуда 1 литра воды в другой, получим, что второй сосуд будет наполнен полностью, а в первом останется необходимое количество воды - ровно 4 литра.

Мы получили ответ, воспользовавшись методом проб и ошибок, но при наличии сосудов с большим объемом или большего количества сосудов будет все сложнее и сложнее использовать данный метод. Например, если задача будет заключаться в том, чтобы из емкостей объемом 11 и 7 литров отмерить 2 литра воды. Очевидно, что понадобится большее количество ходов, поэтому рассмотрим универсальный метод решения на данной задаче с использованием математического бильярда.

Решение.

1. Для начала надо начертить параллелограмм со сторонами, равными 7 и 11(см.рис.1).На одной из сторон отложим 11 одинаковых отрезков, то есть количество воды в 11-литровом сосуде в любой момент времени, а на вертикальной-количество воды для 7-литрового сосуда, получается, 7 одинаковых отрезков.Что означают наклонные прямые? Они указывают на то, что вода переливается из первой емкости во вторую, а вертикальные означают, что вода или вылилась целиком из емкости с меньшим объемом обратно в источник с водой, либо сосуд с большим объемом нужно полностью заполнить водой.

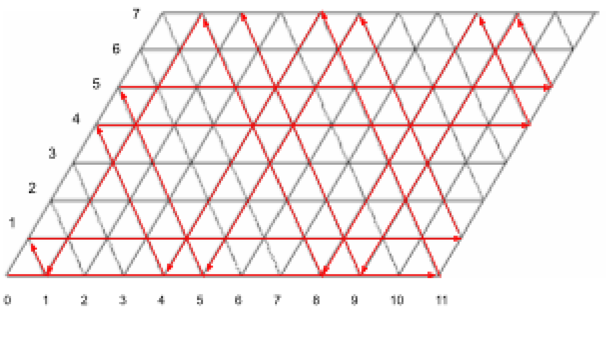


рис.3

Пусть шар изначально находится в точке 0. Он начнет передвигаться вдоль нижней стороны параллелограмма до того момента, пока не столкнется с боковой стороной. Получаем, что сосуд с большим объемом заполнен водой до конца, но в то же время другой сосуд пуст. Далее шар будет двигаться по заданной прямой, в итоге, он ударится о верхний борт в точке - 7 (по вертикали) и 4 (по горизонтали), это значит, что в 11-литровом сосуде 4 литра воды, значит, 7 литров перелили в меньший сосуд. В итоге получим, что шар попадет в точку 2 по вертикали и по горизонтали, значит, получится 18 переливаний.

Проделав данные действия, можно ли быть уверенными, что данная траектория движения является наикратчайшей? На самом деле, нет, есть второй вариант, по которому воду нужно наливать сначала в

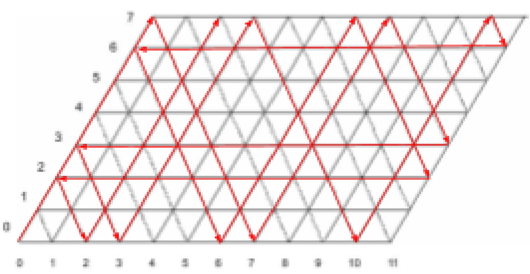


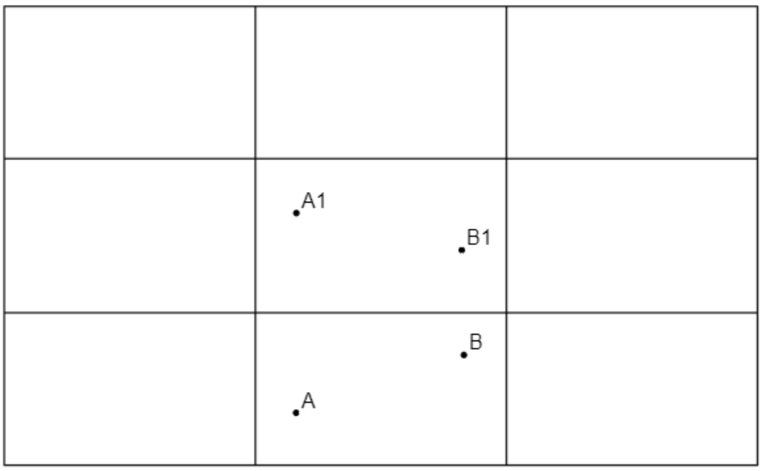
рис.4

сосуд с меньшим объемом, а не в 11-литровый, как в первом решении. Далее, шар двигается из т.О вдоль левой стороны бильярдного стола пока не ударится о верхнюю его сторону. Просчитав новую траекторию шара увидим, что он достигнет нужной точки за меньшее количество ходов, за 14.

Рассмотрим еще одну интересную известную задачу.

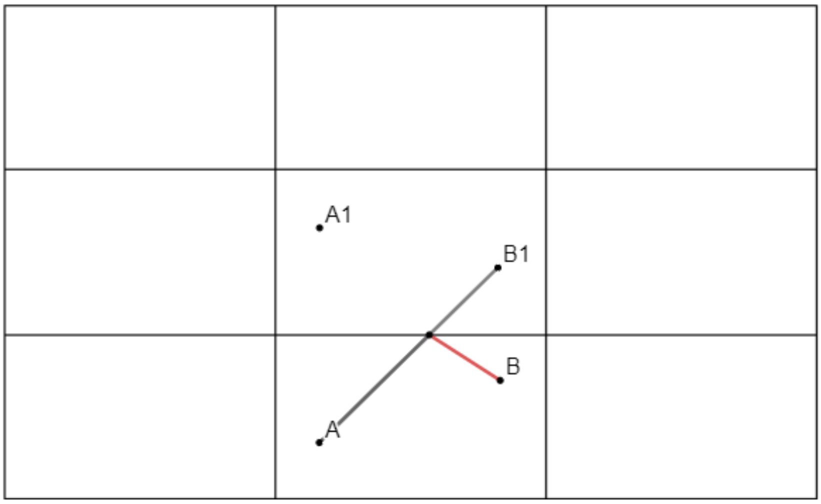
Задача 2. Найти самый короткий путь, по которому следует ползти пчеле из точки А в точку В внутри равностороннего треугольника, чтобы сначала насладиться мёдом на одной стороне треугольника, потом сахаром - на другой стороне, и вареньем - на третьей. (Предполагается, что каждая сторона полностью вымазана соответствующим сладким веществом.)

Рассмотрим аналогичную задачу, но с прямоугольным полем:

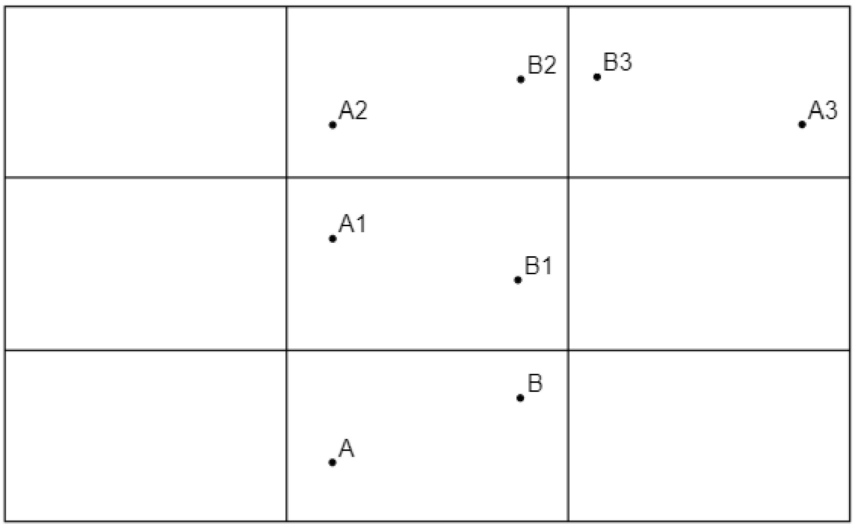


Задача в том, чтобы найти самый короткий из возможных путь из точки А в точку В при условии, что тело отразится от стенок 3 раза.

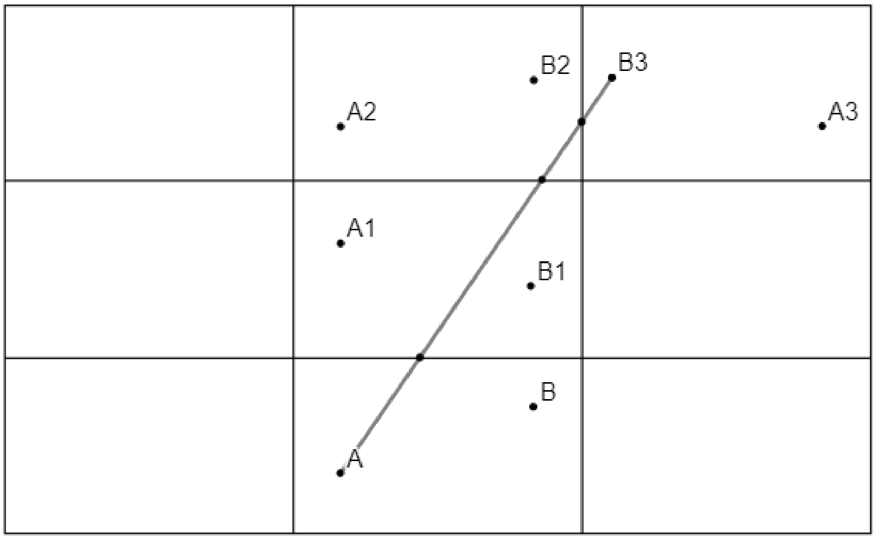
Отразим в любую сторону данный прямоугольник. В нём поставим точки А1 и В1, симметричные точкам А и В. Проведем отрезок АВ1 и заметим, что он имеет только одно пересечение со сторонами прямоугольника, а это значит, что если отразить ту часть отрезка, которая не находится в первом прямоугольнике, относительно общей стороны двух прямоугольников, то конец отрезка окажется в точке B и это будет самым коротким путём из A в B с одним отражением:



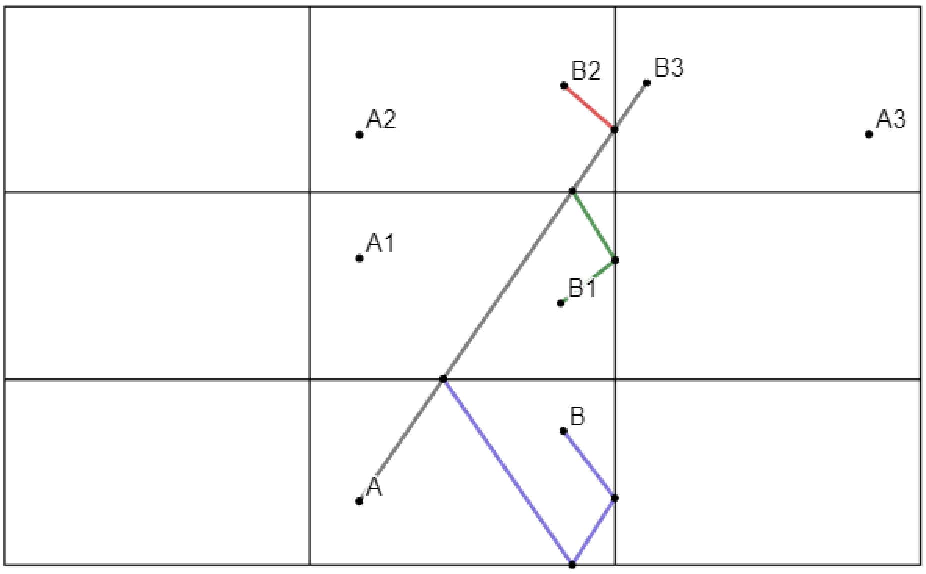
Так как нам нужно то же самое, но с тремя отражениями, построим еще два прямоугольника:



Проведем отрезок AB3. Заметим, что он имеет 3 пересечение со сторонами прямоугольников, а значит, в конце мы получим самый короткий путь из A в B через три отражения от сторон исходного прямоугольника:

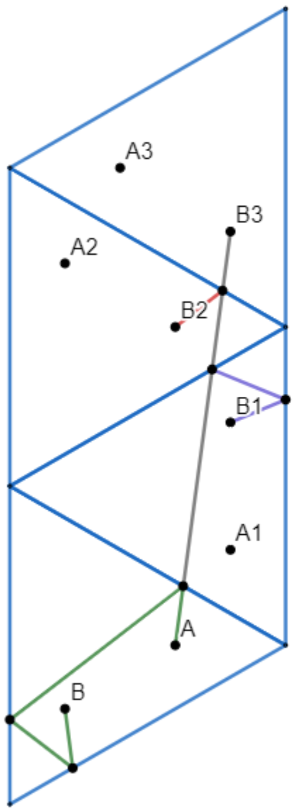


Сначала отражаем часть отрезка, не попавшую в третий прямоугольник, тогда точка B3 перейдёт в точку B2. Потом отражаем часть траектории, не попавшую во второй, а затем в первый прямоугольник (на рисунке каждый шаг отмечен разным цветом):



Получаем искомую кратчайшую траекторию с тремя отражениями.

Теперь аналогично можно решить и задачу с пчелой, только отражать там нужно не прямоугольник, а треугольник:



Изначальный треугольник содержит точки А и В. Зелёная траектория в этом треугольнике - кратчайшая при условии, что пчела побывает на всех сторонах треугольника.

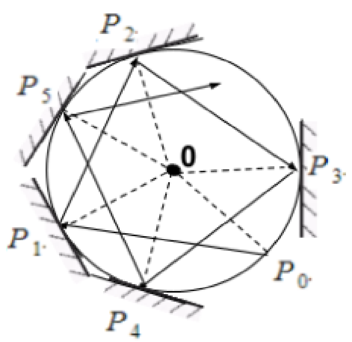
После рассмотрения задач, решающихся методом математического бильярда, можем сформулировать следующие преимущества данного метода:

- Привлекательность идеи бильярда
- Возможность обобщить метод на широкий класс задач
- Наглядность

Изменение поведения шара на круглой плоскости

Математический бильярд интересен не только своей применимостью к задачам, но и тем, что плоскость может быть разной формы,например, мы рассмотрим поведение шара на круглой.

Рассмотрим точечный шар в круге Q, который ограничен окружностью Б. Его траектории - ломаные $P_0P_1P_2P_3P_4$..., вписанные в Б, обладающие свойством равенства в точках$P_1P_2P_3$углов падения и отражения, отсчитываемых от касательных или от радиусов OP_1, OP_2...(см.рис.) Следует отметить тот факт, что звенья траектории между собой равны, т.е.



$$P_0P_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = ...$$

Также равны опирающиеся на них центральные углы:

$$\angle P_0OP_1 = \angle P_1OP_2 = \angle P_2OP_3$$

Нетрудно заметить, что середины звеньев траектории равноудалены от центра окружности,т.О, следовательно, можно сказать, что они расположены на окружности с этим же центром. Знание данного свойства позволяет построить звенья траектории по какому-либо одному из них следующим образом: нужно построить концентрическую с исходной окружность с радиусом OL, где L - середина звена, после из концов звена провести касательные к окружности до пересечения с внешней окружностью Б, далее повторять алгоритм - так и получатся звенья искомой траектории.

Получается, мы установили свойство, справедливое для бильярда в круге:

Любая из траекторий шара в круге не зайдет внутрь концентрического круга, границы которого касаются все ее звенья.

В бильярде в круге можно установить некоторый критерий, который будет позволять выделять периодические траектории и изучать характер поведения непериодических траекторий.

Обозначим радианную меру углов $\angle P_0OP_1$, $\angle P_1OP_2$,...через угол β.Можно заметить,что каждая из вершин траектории может получиться из предыдущей вершины P_{n-1}при помощи поворота на угол βотносительно центра окружности Б, сл-но, можно утверждать, что вершину P_nможно получить из вершины P_0при помощи поворота на угол nβ.Попробуем доказать, что вид бильярдной траектории в круге определяется числом β. А именно:

а) число β соизмеримо с π, т.е $\frac{\beta}{\pi}$является рациональным числом, которое равно некоторой дроби $\frac{m}{n}$, где m и n - целые числа.

б)если β и πнесоизмеримы, т.е число $\frac{\beta}{\pi}$иррационально, то отвечающая углу β траектория не будет периодичной.

△ Если βсоизмеримо с π, то тогда представим его в виде $\beta = 2\pi\frac{m}{n}$, m и n являются целыми числами. Получаем,что $n\beta = 2\pi m$,то есть поворачиваясь, каждая точка окружности Б переходит в саму себя. Все вершины рассматриваемой бильярдной траектории обладают таким свойством, что $P_n = P_0$,$P_{n+1} = P_1$,$P_{n+2} = P_2$,...

Получается, что все вершины, начиная с n-й, повторяются, т.е. бильярдная траектория периодична.▲

Бильярдный шар после n отражений от борта оказывается в исходной точке P_0, сделав m оборотов вокруг центра О(т.е. поворачиваясь вокруг центра на угол $2\pi m$).

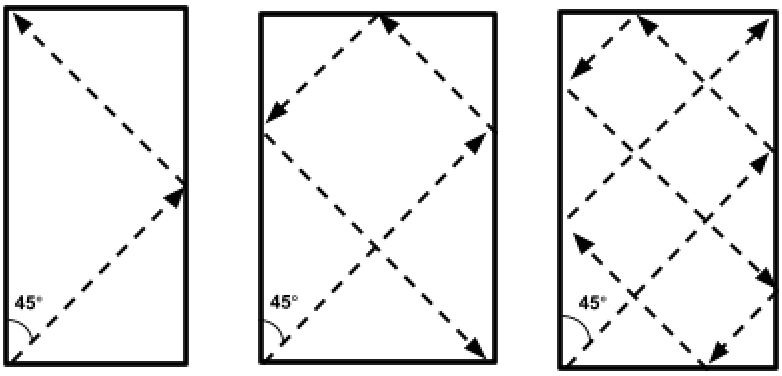
б)Предположим, что бильярдная траектория и в этом случае периодична. Докажем, что βи πсоизмеримы, что противоречит условию и тем самым доказывает его утверждение.

Так как траектория периодична, тогда, начиная с некоторого номера n, вершины траектории повторяются: $P_n = P_0, P_{n+1} = P_1, P_{n+2} = P_2$, и т.д.

Это также и означает, что при повороте на $n\beta$ - целое кратное полного угла: $n\beta = 2\pi m \Rightarrow \frac{\beta}{\pi} = \frac{2m}{n}$ рациональное число, противоречие получено.

Удивительное свойство математического бильярда.

Одно из самых удивительных свойств прямоугольного математического бильярда открыли математики Штайнхауз и Гарднер, оно заключается в следующем: шар, посланный из одной угловой лузы под углов в 45°попадет в другую лузу после некоторого количества касаний о борт, равного $m + n - 2$(m и n соответствуют длине и ширине бильярдного стола, данные числа взаимно простые). За счет законов падения и отражения лучей мы можем проверить данную теорию на практике.



1×2 $\quad m + n - 2 = 1$

2×3 $\quad m + n - 2 = 3$

3×5 $\quad m + n - 2 = 6$

Для этого нам понадобится лазер, зеркала(пара зеркал, стоящих друг против друга, должны быть в два раза длиннее, чем другие два), которые должны стоять перпендикулярно друг к другу, образуя форму прямоугольника. Получается, что лазерный луч,отражается от зеркал и попадает в один из углов имитированного бильярдного стола.

Заключение

В целях выяснения того, имеет ли применение метод математического бильярда для решения задач на логику, мы рассмотрели различные способы разных типов задач. В процессе рассмотрения, мы убедились, что данный метод полезен для широкого класса задач. Данный метод позволяет получить единый подход к решению задач. Также мы смогли рассмотреть поведение бильярдного шара не в классической, прямоугольной плоскости, а в круглой, на практике убедились в одном из свойств прямоугольного математического бильярда.