Автономная некоммерческая образовательная организация
«Физтех- лицей» имени П.Л. Капицы

(АНОО «Физтех-лицей» им. П.Л. Капицы)

XX научно-практическая конференция «Старт в инновации»

Математические секреты в музыке

Автор работы:

Амирзатян А. Т., 7 «Б» класс

Тюрина А.К., 7 «Б» класс

Руководитель:

Вишневецкая Вера Петровна

Московская область, г. Долгопрудный

2021 г

Содержание **Стр.**

1.Введение

На данный момент такая наука, как математика достаточно стремительно приобретает популярность. Однако, ценность музыкального образования стремительно снижается. В нашем лицее на уроках музыки мы не только развиваем вокальные способности, но так же изучаем теорию.

Таким образом мы поставили перед собой цель, понять какие же есть сходства в математике и музыке?

Область исследования: Музыка и математика

Тема исследования: Сходства математики и музыки

Предмет исследования: Математика, музыка

Цель исследования: Найти взаимосвязь между математикой и музыкой.

- Доказать, что музыка основана на тех же законах и принципах, что и математика.

Задачи исследования:

- Выяснить, были ли в истории попытки связать математику с музыкой;

- Проанализировать и найти схожесть математики с музыкой;

- Соединить понятия гармонии и последовательности;

- Попытаться доказать, что обыкновенные дроби- это те же ноты;

- Проанализировать ритм чисел и ритм музыки;

- Изучить литературу по этой теме;

- Провести опрос среди учащихся школы по теме работы

Гипотеза: любое музыкальное произведение можно представить в виде математической модели.

2. Исторические факты

Первое, что мы решили выяснить – кто же первым в истории как-либо пытался связать такие науки, как математика и музыка. Изучив справочную литературу выяснилось, что это был **Пифагор**.

Пифагор – это древнегреческий мыслитель, который родился примерно в 570 году до н.э.

В Южной Италии. Он создал свою школу, в основу которой положил математику и музыку, так как музыка воспринималась на ряду с арифметикой, как научная дисциплина. Так же математика и музыка могут быть связанны тем, что многие ученые математики играли на различных музыкальных инструментах.

Пифагор считал, что гармония чисел родственна с гармонией звуков и что оба этих занятия упорядочивают хаотичность мышления и дополняют друг друга. При знакомстве с музыкальной эстетикой средневековья необходимо иметь в виду, что в то время музыка понималась не как искусство, а как наука. Известно, что музыка входила в состав семи "свободных искусств", делившихся на

"trivium" (грамматика, риторика, логика) и

"quadrivium"(арифметика, геометрия, астрономия, музыка).

Характерно, что музыка относилась именно к сфере математических знаний. Тем самым она признавалась одной из математических дисциплин, одной из отраслей математики. И как таковая она понималась, прежде всего, как наука о числах

2.1. Первые открытия

Одним из достижений Пифагора и его последователей математической теории музыки был разработанный ими «Пифагоров строй». Новая технология использовалась для настройки популярного в то время инструмента – лиры. Тем не менее, «Пифагоров строй» был несовершенен, как и древнегреческая арифметика. Расстояние между соседними звуками «Пифагорова строя» неодинаково. Он – неравномерный. Чтобы сыграть мелодию, от какой-либо другой ноты, лиру каждый раз нужно было перенастраивать.

В основе этой музыкальной системы положен закон, который носит имя двух великих ученых - Пифагора и Архата:

Две звучащие струны определяют консонанс, если их длины относятся как целые числа, образующие треугольное число 10=1+2+3+4, т.е. как 1:2, 2:3, 3:4. Причем, чем меньше число n в отношении n:(n+1) (n=1,2,3), тем созвучнее получающийся интервал.

Четверка чисел 1, 2, 3, 4 – тетраэдр – лежит в основе построения различных музыкальных ладов. Лады состоят из основных ступеней. В основу гаммы пифагорейцы положили интервал октава – восемь. Далее октаву разделили на благозвучные части, и Пифагор обнаружил приятные слуху созвучия: **квинта – пятая ступень, кварта – четвертая, октава – восьмая**. Основа всей музыки – тетрахорда.

До – соль – ре – ля – ми – си – фа – полученные звуки собирались в октаву.

Параллели, противоположности, гармония, анализ, счет, ритм, метр, длина, интервал, высота и многие другие математические понятия «живут» в математике.

3. Музыкальный строй

Музыкальный срой - это система сопоставления нот (знаков, обозначений) и звуковых частот. Периодом музыкального строя является октава, которая состоит из 12 ступеней. Например, на клавиатуре рояля она представлена семью основными (белыми) клавишами и пятью дополнительными (черными). Применяемый в наши дни музыкальный строй допускает прозрачное и изящное математическое описание.

Появление в первой половине XVII века сочинения Иоганна Себастьяна Баха «Хорошо темперированный клавир» канонизировало равномерно темперированный строй – музыкальный строй, в котором отношение звуковых частот соседних нот является величиной фиксированной. Будем обозначать это отношение через ***q*** (большей частоты к меньшей, q >1)

Таблица частот нот равномерно темперированного строя может быть представлена в виде двусторонней последовательности, в которой соединены две геометрические прогрессии.

В качестве точки отсчета берется нота «ля» первой октавы, пусть $f1$- ее частота. Первая ветвь последовательности – возрастающая геометрическая прогрессия $\{f1,\ \frac{f1}{q}, \frac{\mathrm{f1}}{q2}, \ldots\}$ со знаменателем $\frac{1}{q}$.

Зная, на сколько выбранная нота относит от «точки отсчета», можно выписать формулу, связывающую частоты этих двух нот. Например, для правой ветви элемент геометрической прогрессии с номером *n* вычисляется по формуле $f_n = f_1 * q^{n-1}$.

По определению октавы $f_{n+12} = 2 * f_n$ С другой стороны, для элементов геометрической прогрессии $f_{n+12} = f_n * q^{12}$. Значит, $f_n * q^{12} = 2 * f_n$, откуда $q^{12} = 2$.

Следовательно, для октавы из 12 ступеней равномерно темперированного строя фундаментальной характеристикой, мультипликативным (т.е. по умножению) шагом, определяющим «равномерность» движения по последовательности частот, является число: $\boldsymbol{q = \sqrt[12]{2} = 1.059463\ldots}$

Фиксация значения частоты ноты «ля» (например, по камертону) полностью определяет частоты всех нот равномерно темперированного строя. В наши дни каноническим вариантом является значение $f_{1=}$440 Гц

В восприятии человеком мелодии отношение частот звучащих (последовательно или одновременно) нот важнее, чем их абсолютные величины. Именно это обстоятельство привело к осознанной необходимости выбора частот музыкального строя по «мультипликативному» принципу.

Постоянство «мультипликативного» шага у равномерного темперированного строя обусловило его главное преимущество перед историческими предшественниками – возможность «сдвигать» музыкальные мелодии на произвольное число ступеней. При сдвиге фрагмента отношение частот соседних нот остается неизменным, а следовательно, сохраняется и мелодический рисунок.

3.1. Чистые интервалы

Источником звука могут служить музыкальные инструменты различных типов (струнные, духовые и др.), но с точки зрения математиков все способы извлечения звука можно представить с помощью одной, общей для всех них модели – колебание струны.

Модельным устройством генерации звука можно считать монохорд, в древности служивший не только научным прибором, но и музыкальным инструментом. Монохорд- это деревянный резонатор, над которым натянута струна, закрепленная в двух точках. Длину звучащей части можно менять с помощью передвигающейся подставки.

Было установлено, что при неизменных характеристиках струны (материал, натяжение) частота ее колебаний обратно пропорциональна длине ($f \approx 1/\ell$). Частота – главная математическая характеристика звука, определяющая его восприятие человеком на слух. Получается, что уменьшение длины струны увеличивает частоту ее колебаний и, следовательно, высоту звука. Громкость звука связана с другой характеристикой колебаний струны – амплитудой.

В музыке очень важно то, как слушатели воспринимают сочетания звуков. Простейший вариант – пара звуков (музыкальный термин – «интервал»). Опытным путем были найдены приятные для слуха так называемые чистые интервалы. Можно провести эксперимент с двумя одинаковыми монохордами, один из которых служит эталоном, а на втором – менять длину звучащей части струны.

К чистым интервалам относятся: унисон, октава, квинта, кварта (расположены по убыванию благозвучия). Перечисленные интервалы можно описать, приводя отношения длин струн монохордов, участвующих в эксперименте: унисон – длина добавочной струны равна длине эталонной, октава – отношение длины добавочной струны к длине основной равно 1/2 , квинта – отношение равно 2/3, кварта – 3/4. А поскольку частота колебаний струны обратно пропорциональна ее длине, то приведенные интервалы можно описать так: у октавы частоты звука отличаются в 2 раза, у квинты – отношение частот добавочной и эталонной струн равно 3/2, у кварты – 4/3.

Мы считали, что у колебаний струны есть только одна частота (в дальнейшем будем называть ее *основной*), но так дело обстоит только в идеальной модели. В зависимости от свойств струны к основному звуку неизбежно добавляются дополнительные звуки – ***обертоны***.

Наблюдаемые колебания струны с закрепленными концами можно представить как результат наложения так называемых стоячих волн с незакрепленными, но неподвижными точками (узлами) и однотипными колебаниями равных по длине участков между узлами.

Основной тон (определяемый значением f – основной частотой струны) представляем стоячую волну без узлов, неподвижны только концы струн.

Первый обертон (т.е. первый «верхний тон») – стоячая волна с единственным узлом в середине струны. Фактически происходят колебания двух одинаковых струн половинной длины, частота колебаний этих «половиной» - $2f$. ***Второй обертон*** – стоячая волна с двумя узлами, которые делят струну на три равные части. Частота звука, порождаемого колебаниями каждой из трех частей, второе больше частоты полной струны.

В общем случае у обертона с номером n имеется n неподвижных узлов, которые делят струну на $(n+1)$ равных частей. Частота этого обертона равна $(n+1)f$. Полным набором частот реальной струны будет $\{f,2f,3f,4f\ldots\}$

Звучание струны, ее тембр, складывается не только из набора частот, но и из соотношения громкостей обертонов. Громкости обертонов ниже, чем громкость основного тона, и убывают с возрастанием номера обертона. «Природная» согласованность основного тона обертонов приводит и к согласованности совместного звучания, наилучшие результаты – у обертона с небольшими номерами. Взаимодействие основного тона и обертонов оказывается полезным при изучении того, почему благозвучны, хотя в разной степени, чистые интервалы. Можно предложить такое объяснение.

У одинаковых струн один и тот же тембр, поэтому звучат они неразличимо (унисон). При изучении модели «одинаковость» - вещь понятная и достижимая. Но в реальной музыкальной жизни у «одинаковых» струн частотные наборы совпадают, а громкости обертонов могут чуть – чуть отличаться. Следовательно, их тембры близки, но не совпадают. Совместное звучание таких инструментов тоже будет унисоном, но интереснее, чем у каждого из них в отдельности, тембр – богаче.

В октаве длины струн отличаются в 2 раза, и если набор частот у большей струны $\{f,2f,3f,4f\ldots\}$, то у половинной струны – $\{2f,4f,6f,8f,\ldots\}$. Второй набор является частью первого, что объясняет согласованность звуков в октаве – они воспринимаются как похожие, хотя и отличаются по высоте.

В отличие от унисона, в октаве громкость (амплитуда) меняется только у «четных» обертонов большей струны, а у её основного тона $\{f\}$ и «нечетных» обертонов $\{3f,5f,7f,..\}$ - не меняется.

Перейдем к квинте. Если $\{2f,3f,4f,\ \ldots\}$ – частотный набор струны длины ℓ, то

$\{\ \frac{3}{2}f\ ,2*\frac{3}{2}f\ ,3*\frac{3}{2}f,\ldots\}$- частоты струны длины $\frac{2}{3}\ell$. Видно, что даже основной тон малой струны $\frac{3}{2}f$ не входит в число обертонов большей струны. Следовательно, рассмотренный подход, объяснивший благозвучие октавы, непосредственно на квинту не переносится.

Но при восприятии звуков происходит их сопоставление, сравнение, в первую очередь – основных тонов. И возникает воображаемая «объединяющая» струна длины 2ℓ, в частотный набор которой $\{\frac{f}{2},2*\frac{f}{2},3*\frac{f}{2},\ldots\}$ погружаются и основные тоны струн ℓ и $\frac{2}{3}\ell$, и даже все их обертоны.

Важно, что длина «объединяющей» струны - $\ell 2$, что относительно близко к длинам струн квинты. Длина 2ℓ - наименьшая, в которую целое число раз укладывается отрезки длины ℓ и длины $\frac{2}{3}f$, можно сказать, это их наименьшее общее кратное (НОД). Следствием близости числа 2ℓ к ℓ и $\frac{2}{3}\ell$ является то, что основные тоны струн квинты оказываются обертонами струны 2ℓ с небольшими номерами, т.е. являются благозвучными и «знаменитыми» игроками в тембре объединяющей струны.

Включение частот обеих струн квинты в гармоничный мир обертонов объединяющей струны вызывает у слушателя ощущение благозвучности и согласованности

С другой стороны, при восприятии звуков происходит и прямое сопоставление частот струн квинты $\{f,2f,3f,4f,\dots\}$ у струны ℓ, $\{\frac{3}{2}f, 2*\frac{3}{2}f, 3*\frac{3}{2}f, \dots\}$ у струны $\frac{2}{3}\ell$. Все «четные» обертоны малой струны являются обертонами большей, а основной тон и все «нечетные» обертоны малой струны – нет. Эти «непарные» тоны малой струны – причина того, что гармония становится неполной: квинта благозвучна, но уступает октаве.

4. Ритм

Стоит услышать слово ритм, как наши мысли невольно обращаются к музыке, и это вполне понятно: ведь ритм – один из важнейших элементов музыки. Ритм – это чередование долгих и коротких, одинаковых и разных по длительности звуков. Музыкальный ритм (обычно одновременно с высотой звука) фиксируют с помощью музыкальной нотации. Музыкальные звуки различны по своей длительности, вследствие чего между ними создаются определенные временные соотношения. Объединяясь в различных вариациях, длительности нот образуют различные ритмические фигуры, из которых складывается общий ритмический рисунок музыкального произведения. Ритм не привязан ни к каким абсолютным единицам измерения времени, в нём заданы лишь относительные длительности нот (эта нота звучит дольше той в 2 раза, а эта — в 4 раза короче и т.д.).

Окружающий мир полон ритмов. Ритмично звучат шаги, стучат и грохочут машины: моторы автомобилей, двигатели тракторов, колеса поездов…

В прошлом были неоднократные попытки рассматривать ритм, как один из объектов изучения математики. Важно отметить, что все ритмические численные соотношения переносятся и в звуковысотную сферу, что говорит об универсальности музыкальных закономерностей.

Одна из идей, связывающих музыку с цифрами, — евклидов ритм. Евклидов ритм был обнаружен в 2004 году профессором информатики *Годридом Туссеном*. Тем не менее корни термина уходят в III век до нашей эры. Примерно тогда греческий математик *Евклид* в работе «Начала» описал революционный для своего времени алгоритм нахождения самого большого общего делителя двух целых чисел. Суть метода в том, чтобы из пары целых чисел получить новую пару, состоящую из меньшего числа и разницы между большим и меньшим числом. Процесс выведения чисел повторяется до тех пор пока числа не станут равны.

В 2004 году *Туссен* заметил, что алгоритм Евклида можно применить в музыке для генерации самых разнообразных ритмов. Более того, *Туссен* обнаружил, что созданные на основе алгоритма древнегреческого математика ритмы равномерны, а доли (удары) между собой равноудалены. В итоге *Годфрид* написал работу «The Euclidean Algorithm Generates Traditional Musical Rhythms», в которой пришёл к выводу, что в основе практически всей этнической музыки (африканской и европейской) *лежит Евклидов алгоритм*. Получающиеся на его основе ритмы с равноудалёнными и равномерными долями *Туссен* назвал **евклидовыми.**

Простой ритм является соотношением между кратными числами. К примеру, числом долей (4) и количеством шагов (16) составляет ровно 4. При таких настройках *Евклидов* алгоритм делает очевидное: генерирует звук один раз в четыре шага. То же самое мы получим, если возьмем четыре такта в размере 4/4 (в сумме 16 долей) и воспроизведём любой звук в начале каждого из них.

Но он станет сложнее, если количество шагов и долей не будут кратными. Для примера оставим 16 шагов и увеличим количество долей до шести. Так как число 16 нельзя разделить на равные группы из числа 6, алгоритм вынужден распределить доли более плотно и равномерно на окружности, чтобы не нарушить установленные для него границы. В итоге точки сгруппируются так, что некоторые из них окажутся ближе друг к другу, образовав подобие пар.

Также можно объединить несколько евклидовых ритмов между собой. Скрестив два ранее сгенерированных ритма, мы получим полиритм – основу этнической музыки (особенно африканской). Два контрастных ритма, несмотря на отличия, сливаются в один необычный комплексный ритм.

Евклидовы ритмы кажутся бездушными и слишком математическими, но в этом нет ничего плохого — многие ритмы сами по себе являются евклидовыми. Исследуя алгоритм древнегреческого учёного, *Туссен* пришёл к выводу, что большинство ритмов, встречающихся в самых разных культурах, ***на самом деле являются евклидовыми***.

5. Практическая часть

5.1. Исследование музыкальных произведений

Попробуем сделать математическую модель произведения. Давайте посмотрим, что у нас получилось.

Мы взяли музыкальное произведение для скрипки « Вечная любовь» Шарль Азнавур, Жоржа Гарваренц. Каждой ноте мы присвоили номер ступени. Цифра *1 – I ступень, 2- II, 3–III, 4– IV, 5 – V, 6 – VI, 7– VII.* Тональность этого произведения – фа мажор, следовательно, отсчет будет он ноты фа.

1717/1121716/6565/667656/2346/5/2341

Черта между цифрами служит тактовой чертой, то есть делит их на такты так, как сделано в произведении. В музыке есть понятие об устойчивых ступенях – ступенях, на которых строится тоника: 1, 3, 5. Если в каждом полном такте сложить номера устойчивых ступеней, то мы заметим следующую закономерность.

В первом такте сумма равна 2 (1+1), во втором такте 4 (1+1+1+1), в третьем 5, в четвертом сумма равна 5, в пятом сумма равна 3, в шестом 5, в седьмом 3

Получился ряд чисел: 2.4.5.5.3.5.3…Таким образом мы можем наблюдать закономерность, следовательно в произведении повторяется группа чисел 5.3.5.3…

5.2. Исследование дат рождений

Согласно теории Пифагора, числа обладают абсолютной властью над всеми событиями, над всеми живыми существами, а значит, что числа правят музыкой. Он утверждал, что музыка подчиняется высшему закону (математике) и вследствие этого восстанавливает в организме человека гармонию.

Нумерология – это паранаука о числах. Нумерология имеет еще одно распространенное название – Магия Чисел. В нумерологии все слова, имена, числа можно свести к единичным разрядам (однозначным числам), которые соответствуют различным характеристикам, влияющим на жизнь человека. Это значит, что каждому однозначному числу, согласно нумерологии, соответствуют определенные свойства, образы и понятия.

Нумерологию в основном используют для определения характера человека, его природных способностей, для выявления сильных и слабых сторон его личности, предсказания будущего, для выбора наилучшего времени для принятия серьезных решений и начала действий, а также для определения подходящей профессии, места проживания и многих других факторов.

Даты рождения – это ряд чисел. Попробуем установить связь между числами и музыкой.

Нами были исследованы наши даты рождения , а так же некоторых одноклассников.

Как известно, дата – набор цифр. Мы переложили даты на ноты. У каждого человека получилось по одному аккорду.

Были аккорды звучащие гармонично и режущие слух. После того как были переложены даты рождения на аккорды, мы попробовали установить связь между звучанием даты рождения и способностями человека. Таким образом, получили следующее:

Амирзатян Арина – 20.07.2007

Тюрина Анна – 14.11.2007

Дунаева Диана – 28.12.2007

Снежкин Никита – 21.03.2007

Шелагинова Марина – 23.05.2007

Скрынник Мирослав – 29.01.2008

Федотова Ирина – 28.04 2008

Киселева Вероника – 19.12.2007

Лямзина Анна – 15.11.2007

Поздняев Кирилл – 04.06.2007

Биценко Яна – 06.11.2007

Таким образом, все по звучанию дат рождения, разделился на две группы.

В первой группе, где аккорды звучали мелодично, оказалась большинство детей с творческими наклонностями: некоторые из них закончили музыкальную или художественную школу, занимаются танцами. Данная группа детей обладает творческими способностями, косвенно или напрямую связана с музыкой.

Во второй группе, где аккорды звучали «резко», учащиеся занимаются различными видами спорта.

Следует отметить, что в первой группе оказался учащийся, который занимается в спортивных секциях, но не занимается музыкой и танцами. Предполагаем, что возможно, он имеет эти склонности, но ещё не реализовал их.

6. Анализ результатов анкетирования.

Учащимся АНОО «Физтех – лицея» им. П.Л. Капицы было предложено пройти опрос по теме работы. Их задача заключалась в том, чтобы ответить на поставленные вопросы:

1.Занимаетесь (занимались) ли вы в музыкальной школе?

Да, занимаюсь сейчас
Да, уже закончил
Нет, никогда не занимался
Занимался, но забросил

2.Считаете ли Вы, что математика и музыка одинаково важны?

Да
Нет

3.Знаете ли вы, кто первым пытался связать такие науки, как математика и музыка?

Архимед
Евклид
Пифагор
Демокрит

4.Сколько нот в одной октаве?

15
9
14
7

5. Что такое ОБЕРТОН

Призвуки, входящие в спектр музыкального звука
Высокий звук
Способ певучего исполнения мелодии
Ноты, входящие в состав октавы

6."trivium" что это значит?

Арифметика
Геометрия
Астрономия
Логика

При анализировании результатов выяснилось, что большинство учеников никогда не занимались в музыкальной школе (Да, занимаюсь сейчас – 13.3%; Да, уже закончил - 26.7%, Нет, никогда не занимался – 53.3%, Занимался, но забросил – 6.7%). Большинство считает, что математичка и музыка не одинаково важны (Да – 40%, Нет – 60%). Так же не все ученики знакомы с историей и многие считают, что первым человеком, кто пытался связать эти две науки – это Евклид, хотя на самом деле – это был Пифагор (Архимед – 20%, Евклид – 33.3%, Пифагор – 26.7%, Демокрит – 20%). При ответе на вопрос о количестве нот в октаве, в основном ответили 7 (правильный ответ) (15 -12.5%, 9 – 12.5%, 14 – 12.5%, 7 – 62.5%). В ответе на вопрос «Что такое ОБЕРТОН» мнения разделились (верный ответ – призвуки, входящие в спектр музыкального звука) (Призвуки, входящие в спектр музыкального звука – 31.3%,Высокий звук – 31.3%, способ певучего исполнения мелодии – 18.8%,Ноты, входящие в состав октавы – 18.8%) . В ответе на последний вопрос большинство выбрало не правильный ответ – арифметика, хотя верный – логика (Арифметика – 43.8% , Геометрия – 18.8%, Астрономия – 18.8% , Логика - 18.8%) (Приложение 1)

7. Заключение.

Данное исследование доказывает, что математика и музыка имеют много общего и между ними существует связь. Стоило бы пересмотреть наше представление о том, что музыка приходит композитору исключительно по наитию: создание произведения – это труд, который требует рационального мышления. Моцарт не был бы Моцартом, если бы не продумывал каждое свое произведение.

О взаимосвязях музыки и математики можно говорить вечно, открывая всё новые и новые, неожиданные и скорее странные понятия и смыслы. Таким образом, связь математики и музыки неоспорима. Словно абсолютно разнящиеся по направленности сферы деятельности – наука и искусство, – но они переплетаются очень тесно. Математика и музыка имеют общие принципы в теоретических процессах, которые проявляются и в практических сторонах своих сфер. Также музыку и математику связывают установленные исследователями психологические и логические связи, показывающие их взаимовлияние друг на друга при обучении человека. Конечно, изучение этой области нельзя назвать полностью завершённым, но тем не менее факт того, что математика и музыка работаю на основе аналогичных процессах доказывается теоретическим и практическим путями.

В результате нашей работы мы доказали, что обыкновенные дроби – это те же ноты, проанализировали ритм чисел и ритм музыки, соединили понятия гармонии и последовательности.

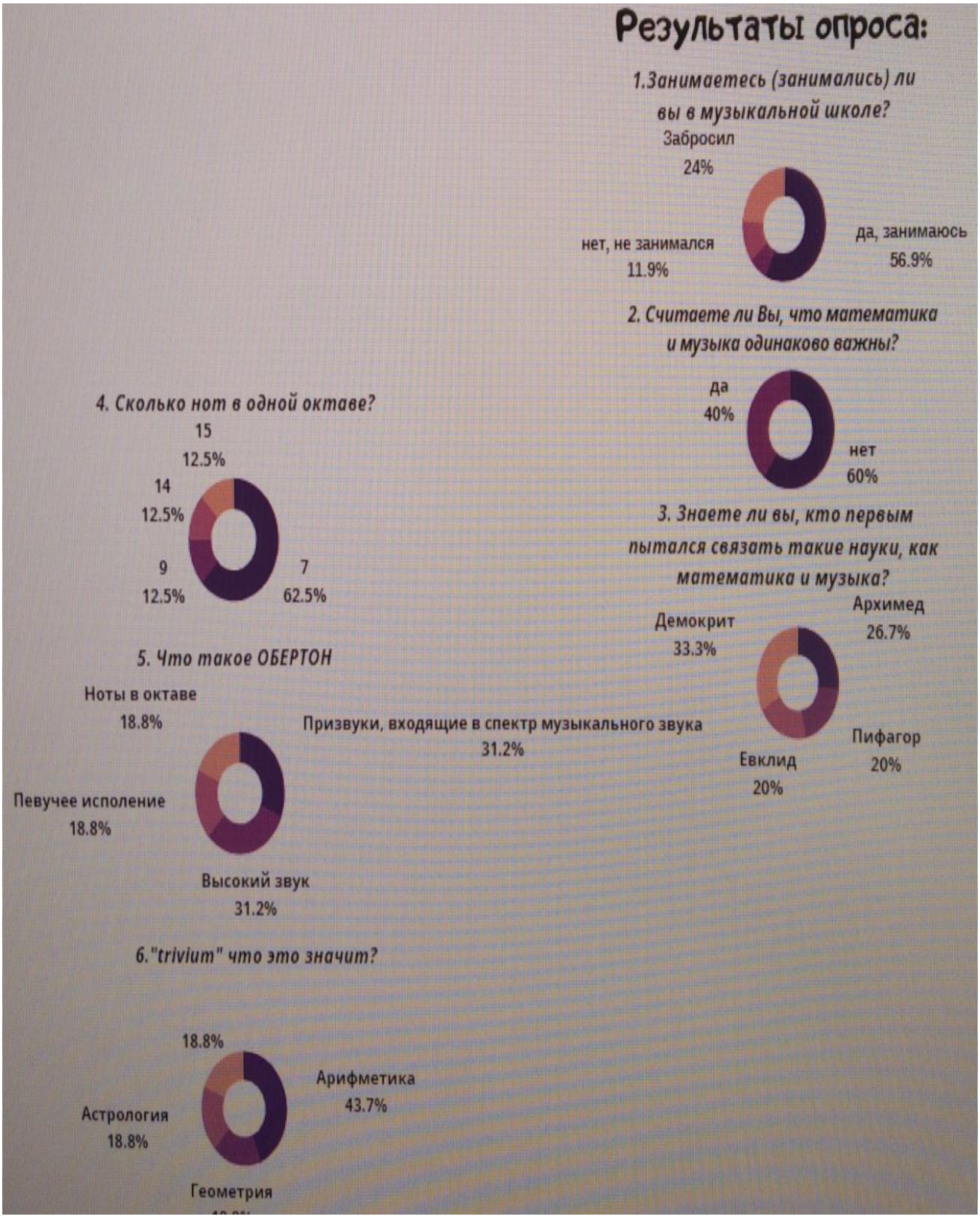
В ходе работы над темой «Математика в музыке», мы пришли к **выводам**:

1. Математика имеет тесную связь с музыкой.
2. Математика, как наука может развиваться без музыки, а музыкальное искусство подчиняется многим законам математики и не может существовать без нее.
3. Провели опрос, среди учеников «Физтех – Лицея»

8. Список литературы.

1. Математический энциклопедический словарь. - М., 1988.
2. "Язык, музыка, математика", Б. Варга. Ю. Дюмень, Э. Лопариц., 1993.
3. А.В. Волошинов. Математика и искусство. - М., "Просвещение", 2000.
4. Математическая составляющая Н. Н. Андреев, С.П. Коновалов, Н.М. Панюнин.
5. Келдыш Г.В. Музыкальный энциклопедический словарь [Текст]/ Г.В.Келдыш. – Москва: «Советская энциклопедия»,1990 – 672 с.
6. Самбурская А. Математический компонент музыкального язык.
7. Амосов Г.Г. Музыкальное исчисление

9.Приложения.


Результаты опроса:
1.Занимаетесь (занимались) ли вы в музыкальной школе?
Забросил
24%
нет, не занимался
11.9%
да, занимаюсь
56.9%
2. Считаете ли Вы, что математика и музыка одинаково важны?
да
40%
нет
60%
3. Знаете ли вы, кто первым пытался связать такие науки, как математика и музыка?
Демокрит
33.3%
Архимед
26.7%
Пифагор
20%
Евклид
20%
4. Сколько нот в одной октаве?
15
12.5%
14
12.5%
9
12.5%
7
62.5%
5. Что такое ОБЕРТОН
Ноты в октаве
18.8%
Призвуки, входящие в спектр музыкального звука
31.2%
Певучее исполнение
18.8%
Высокий звук
31.2%
6."trivium" что это значит?
18.8%
Арифметика
43.7%
Астрология
18.8%
Геометрия