Автономная некоммерческая общеобразовательная организация "Физтех-лицей"
(АНОО «Физтех-лицей» им. П.Л. Капицы)

XX научно-практическая конференция

«Старт в инновации»

Составление задачника по комбинаторике. Разработка программного обеспечения Combo

Выполнили:
Антонова Анна 8Б
Руководитель:
Наливайко Святослав Игоревич

Московская область, г. Долгопрудный

2021 г.

Цель работы: составить сборник задач по базовым темам перечислительной комбинаторики и разработка программного обеспечения – тренажера для решения таких задач

Задачи:

1. Ознакомиться с основными темами перечислительной комбинаторики
2. Составить задачи и краткое описание по каждой изученной теме
3. Разработать приложение, генерирующее различные задачи на базе задачника
4. Перенести приложение в telegram-бота

Актуальность:

В жизни мы часто сталкиваемся с необходимостью рассмотрения всех различных вариантов событий. Важно уметь рассчитывать их количество, чтобы грамотно оценивать сложность алгоритма.

Начать самостоятельно изучать перечислительную комбинаторику сложно – обычно для решения предлагаются задачи, непосильные для большинства школьников. Наш сборник начинается с самых простых упражнений, сюжеты задач веселые. Когда ребята начинают решать простые задачки и все получается, хочется двигаться дальше и решать чуть более сложные.

На основании сборника задач мною был проведен он-лайн урок с учениками 6 и 10 классов в школе без углубленного изучения математики. Ребята, которые пришли на занятие, участвовали в решении заданий и быстро освоили рассказанный материал. Занятие длилось около часа, все участники активно работали до конца урока.

Идея использования для знакомства с непростыми темами очень простые задачи была продолжена мною на других разделах математики и опробована в младших возрастных категориях. Даже дошкольники с удовольствием решали предложенные задачки и у них получалось.

Для отработки самостоятельной отработки тем на основе задачника был разработан тренажер. На базе одной задачи можно создавать почти бесконечное количество вариантов с другими численными значениями. Также он может быть использован учителем в группе, для создания и проверки работ по вариантам.

В данный момент ведется работа по интеграции обучающей программы в Телеграм-бот. Изучаются принципы написания алгоритма бота, придумана концепция ведения диалога, проведена предварительная подготовка кода.

ТЕКСТ ЗАДАЧНИКА.

Правило сложения и умножения

Пусть мы имеем n способов сделать действие типа A и m способов действия типа B. Тогда существует

A или B

n + m способов выполнить действие A или действие типа B, причем одно действие исключает другое

A и B

n * m способов последовательно выполнить действие типа A и действие типа B, то есть сначала действие типа A, потом действие типа B

Например:

Задача 1.1.

Костя выбирает подарок Антону на день рождения. В магазине есть 13 видов CD дисков и 12 видов DVD дисков. Сколькими способами он может выбрать один диск в подарок?

Решение:

Всего есть 13 + 12 = 25 различных дисков. Костя может выбрать любой из них, то есть всего у него существует 25 способов.

В этой задаче мы применили правило сложения. Костя мог 13 способами совершить действие типа A (выбрать CD диск) и 12 способами действие типа B (DVD диск). Мы сложили эти значения и получили ответ 25.

Задача 1.2.

Привидение вызывает Каспера одновременно 7 человек. Он может явиться в одном из 9 своих обликов. Сколькими способами он может прийти на зов?

Решение:

Выбрать облик, в котором явится Каспер, можно 9 способами. В каждом из своих обликов он может появиться у одного из 7 человек, т.е. всего 9 * 7 = 63 способа.

Здесь мы использовали правило умножения. Каспер может 7 способами совершить действие типа A (выбрать человека) и 9 способами действие типа B (выбрать внешность). Мы перемножили эти значения и получили ответ 63.

Попробуйте решить следующие задачи самостоятельно:

Задача 1.3. У Александра Македонского в гардеробе 3 греческих шлема, 4 персидских и один свой. Сколькими способами он может надеть на голову один шлем?

Ответ: 3 + 4 + 1 = 8

Задача 1.4. В шкафу лежит 12 левых перчаток и 6 правых, причем все разного цвета. Сколькими способами можно выбрать две перчатки – одну левую и одну правую?

Ответ: 12 * 6 = 72

Задача 1.5. Осьминог, играя в доту, сломал на компьютере все клавиши, кроме пяти. Сколькими способами он может напечатать код длиной 12 символов?

Ответ: 5 ^ 12

Задача 1.6. У марсианина 5 рук. Когда марсианин играет в ладушки, он бьет одной из своих рук по руке соперника, причем каждой рукой ровно по одному разу. Сколько существует различных алгоритмов игры?

Решение: 5 * 4 * 3 * 2 * 1. Сначала марсианин бьет любой рукой. Руки не могут повторяться, поэтому во второй раз он уже может ударить не одной из 5, а одной из 4 оставшихся рук, в третий – одной из 3 и т.д.

Факториал! или число размещений

Пусть имеется множество, содержащее n различных элементов. Произвольный упорядоченный набор (то есть важно, в каком порядке идут элементы), составленный из k элементов этого множества, называется размещением из n элементов по k элементов (или просто размещением из n по k)

Число (количество) размещений обозначается как A_n^k и читается «а из эн по ка». Задача на размещение нам уже встречалась выше (задача 1.6)

$A_n^k = n * (n – 1) * (n – 2) * … * (n – k + 1)$

Перестановка – частный случай размещения, в котором k = n, т.е. размещение всех объектов множества.

Рассмотрим следующую задачу:

Задача 2.1. Эммануэль играет в солдатики. У него есть 13 разных солдатиков. Он хочет выстроить в шеренгу для парада 4 из них. Сколькими способами он может это сделать?

Решение:

Первым Эммануэль может поставить любого из 13 солдатиков. Вторым он может поставить уже любого из 12 солдатиков – он не может поставить туда солдатика, который уже стоит первым, и т.д. Всего существует 13 * 12 * 11 * 10 способов.

А как записать это произведение короче? В математике принято обозначение n! (читается «эн факториал»)

$n! = n * (n - 1) * (n -2) * … * 1$,

т.е. n! – это произведение всех чисел от 1 до n. Тогда

$A_n^k = (n * (n – 1) * (n – 2) * … * (n – k + 1) * (n – k)!) / (n – k)! = n! / (n – k)!$

Важно: 0! = 1

Потренируйтесь на следующих задачах:

Задача 2.2. В ряд сажают 6 елок разного цвета. Сколько вариантов такой аллеи существует?

Ответ: 6! / 0! = 6!

Задача 2.3. Скелет Антон и вурдалак Гавриил, познакомившись, сразу сели играть в карты. Скелет явно мухлюет, поэтому Гавриил ожидает, что у Антона все семь карт – козыри, и он будет выкидывать их подряд. Сколько различных стратегий ожидает Гавриил? (в колоде 9 козырей, и все разные)

Ответ: 9! / 2!

Задача 2.4. Сколько существует анаграмм слова ГРАФ? (анаграммой является любая перестановка букв слова, включая само слово)

Число сочетаний

Пусть имеется множество, содержащее n различных элементов. Произвольный неупорядоченный набор (то есть порядок элементов не важен), состоящий из k элементов этого множества, называется сочетанием из n элементов по k элементов.

Количество сочетаний из n элементов по k элементов обозначается как C_n^k и читается «це из эн по ка».

$C_n^k = n! / (k! * (n – k)!)$

Откуда берется эта формула? Размещения из n по k являются одним и тем же сочетанием, если отличаются только порядком элементов. Количество таких размещений для каждого сочетания является количеством перестановок и равно k!, т.е. количество сочетаний будет в k! раз меньше количества перестановок.

Например:

Задача 3.1. В шкатулке лежит 7 интегралов. Игнат берет 2 из них, причем порядок не важен. Сколькими способами он может это сделать?

Решение:

Если Игнату важен порядок, то он может взять интегралы 7! / 5! способами. Если же порядок важен, то пары {A, B} и {B, A} будут одинаковыми, то есть количество сочетаний будет в 2 или 2! (т.к. 2! = 2) раз меньше количества размещений, и искомое количество способов равно 7! / (5! * 2!)

Интересное свойство числа сочетаний:

$C_n^k = C_n^{n-k}$

Попробуйте самостоятельно разобраться, почему это так.

Задачи для решения:

Задача 3.2. Пол в комнате покрыт 16 плитками. Инкогнито собирается разбить

Задача 3.3. В комнате 12 человек, 5 из которых девочки. Сколькими способами можно расставить всех в ряд так, чтобы никакие две девочки не стояли рядом?

Задача 3.4. Сколькими способами можно составить 4-хзначное число, в котором все цифры идут по убыванию?

Число размещений с повторениями

Рассмотрим следующую задачу:

Задача 4.1. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы слова МАТЕМАТИКА? Словом считается любая конечная последовательность букв.

Казалось бы, решением является число перестановок, то есть 10!, но такое решение не учитывает, что в слове есть одинаковые буквы. Например, если мы пронумеруем буквы М, то последовательности M_1АТЕM_2АТИКА и M_2АТЕM_1АТИКА будут разными, но на самом деле они одинаковые и слово МАТЕМАТИКА подсчитано несколько раз. Сколько именно раз оно подсчитано? Расставить индексы под буквами М можно 2! способами, под буквами А 3! способами и под буквами Т 2! Способами, т.е. существует 2! * 3! * 2! расстановок индексов, то есть всего можно составить 10! / (2! * 3! * 2!) различных слов. Сформулируем в общем виде:

Пусть мы имеем множество, состоящее из n элементов, причем существует a_1 элементов первого типа, a_2 второго типа и т.д., a_m элементов m-того типа. Тогда существует

$n! / (a_1! * a_2! * \ldots * a_m!)$

перестановок множества.

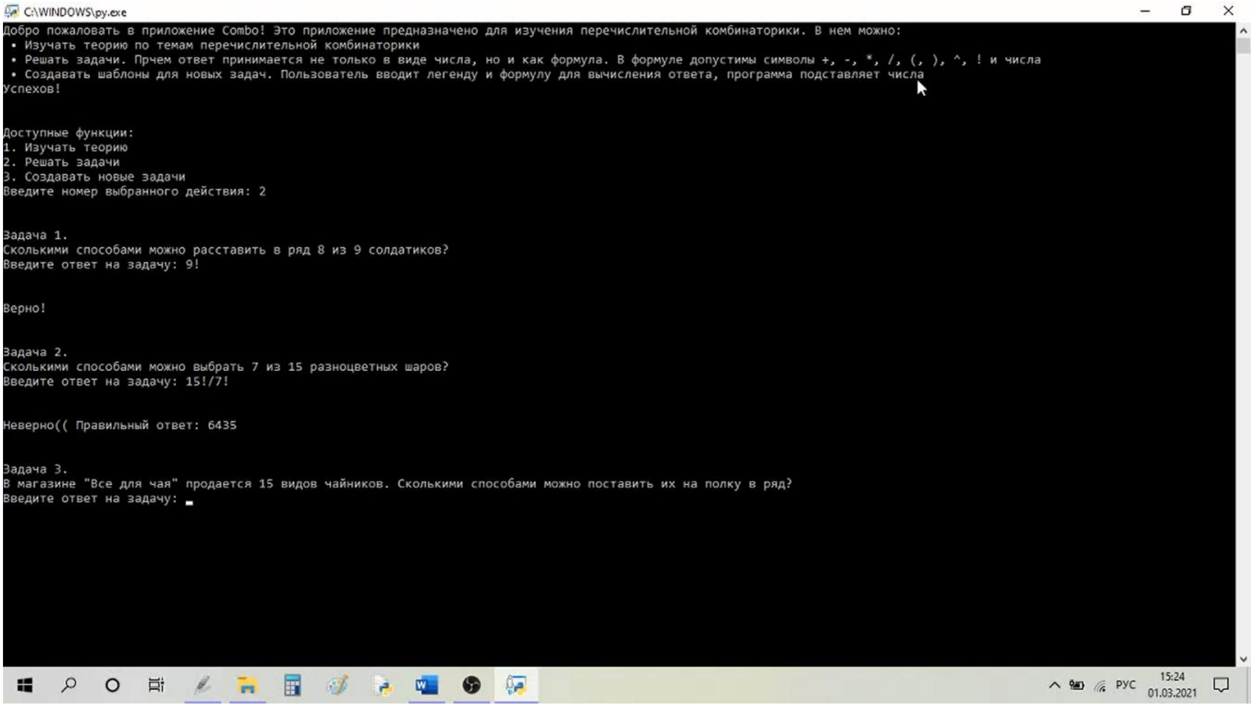
Решите самостоятельно следующие задачи:

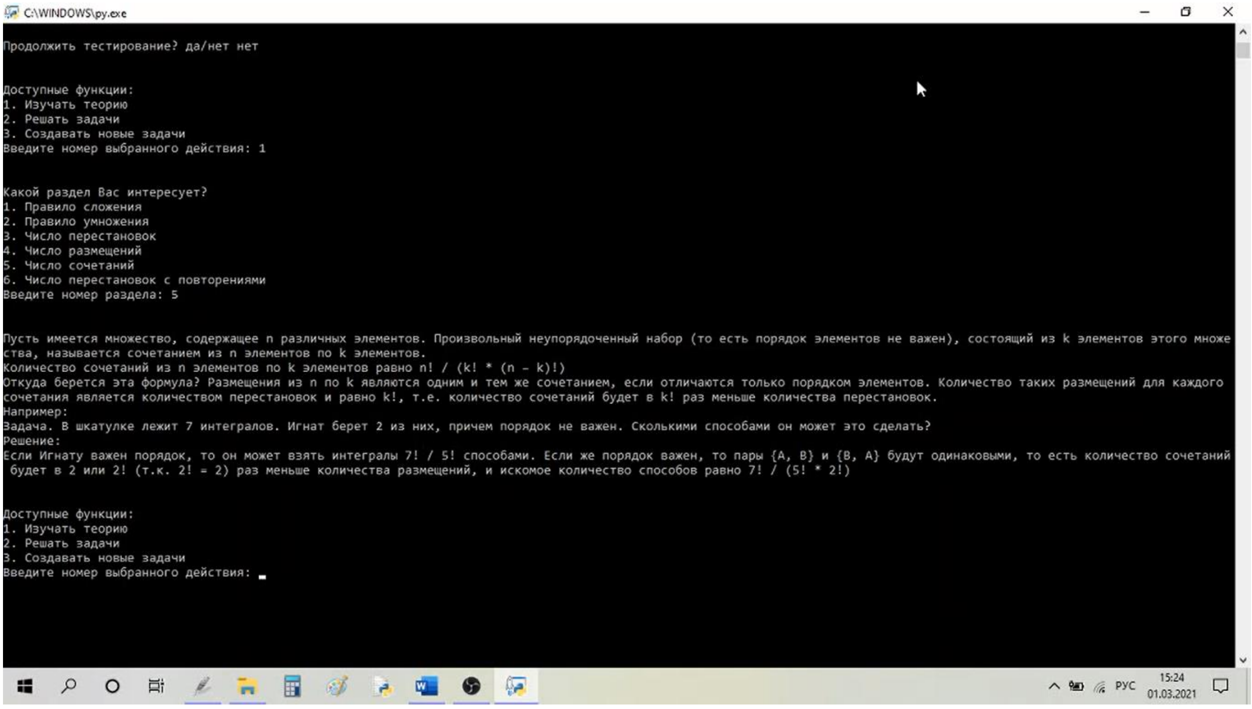
1. Сколько существует анаграмм слова ГРАФ? А слова АНАГРАММА?

2. Сколькими способами можно добраться из левой верхней в правую нижнюю вершины клетчатого прямоугольника со сторонами 5 и 7, двигаясь по сторонам клеток вправо и вниз?

3. Сколькими способами учитель может раздать 6 слоников и 3 жирафиков 9 ученикам?

Скрины приложения





Список литературы:

1. Яковлев И.В. КОМБИНАТОРИКА ДЛЯ ОЛИМПИАДНИКОВ. Москва: МЦНМО, 2014.
2. Сириус.Курсы: Дополнительные главы комбинаторики. 7 класс. v1.2 [https://edu.sirius.online/#/course/240 2021/01](https://edu.sirius.online/#/course/240%202021/01).
3. Журналы Квантик. Москва: МЦНМО, 2018.