

Автономная некоммерческая общеобразовательная  
организация “Физтех-лицей”  
(АНОО «Физтех-лицей» им. П.Л. Капицы)

## XX научно-практическая конференция

### «Старт в инновации»

Вычисление размерности пространства

Выполнили:  
Бобрышев Дмитрий 10 Б класс  
Ратновский Артём 10 Б класс  
Пахомов Даниил 10 Б класс

Руководитель:  
Гуленко Т. Н.

Московская область, г. Долгопрудный  
2021 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Вводная часть.</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Теоретическая часть.</b>	<b>4</b>
2.1	Вычисление объёма. Координатный подход. . . . .	4
2.2	Представление объёма пирамиды через длины векторов. . . . .	6
2.3	Программные средства для расчётов. . . . .	7
2.4	Решение задачи в идеальном приближении. . . . .	7
2.5	Решение задачи в первом приближении. Корректировка программы вычислений. . . . .	7
<b>3</b>	<b>Практическая часть.</b>	<b>9</b>
3.1	Выбор объекта измерения. . . . .	9
3.2	Описание измерительной “установки” и инструментов измерений. . . . .	10
3.3	Процесс измерений расстояний. . . . .	11
3.4	Измерения геометрии наконечников кнопок. . . . .	12
3.5	Подстановка результатов измерений. . . . .	14
3.6	Анализ ошибок и их вкладов в неточность результатов. . . . .	15
<b>4</b>	<b>Выводы.</b>	<b>15</b>
<b>5</b>	<b>Приложение. Фотоматериалы по геометрии вершин.</b>	<b>16</b>
5.1	Плоскость 1 – 2 – 3 – 4 - вершина 5 (“белая” кнопка) вниз. . . . .	16
5.2	Плоскость 1 – 5 – 3 вершина 2 (“зелёная” кнопка) направлена вверх. . . . .	17
5.3	Плоскость 2 – 5 – 4 вершина 1 (“красная” кнопка) направлена вверх. . . . .	18

## Список иллюстраций

1	Пирамида с идеальными, точечными вершинами. а. — вид сверху; б. — небольшое смещение от вертикали; с. — перспектива . . . . .	5
2	Пирамида с неидеальными вершинами в виде сфер. а. — вид сверху; б. — предполагаемые измерения; . . . . .	8
3	Силовые канцелярские кнопки - слева и измеряемая пирамида (результат спайки) - справа.	10
4	Измерительный “стол” со штангельциркулем и общий вид с пирамидкой и контрольной полосой миллиметровки штангельциркулем в процессе измерения . . . . .	11
5	Стандартный вид измерения расстояния между парой вершин слева и контроль зазора на правой фотографии . . . . .	11
6	Пример обработки пары изображений для вершины 1. Красная кнопка. . . . .	12
7	Общий вид плоскости 1 – 2 – 3 – 4 при взгляде на основание “снизу”. . . . .	16
8	слева — исходная фотография вершины 1 (“красная” кнопка), справа — после обработки.	16
9	слева — исходная фотография вершины 2 (“зелёная” кнопка), справа — после обработки.	16
10	слева — исходная фотография вершины 3 (“синяя” кнопка), справа — после обработки. .	17
11	слева — исходная фотография вершины 4 (“жёлтая” кнопка), справа — после обработки.	17
12	слева — исходная фотография вершины 1 (“красная” кнопка), справа — после обработки.	17
13	слева — исходная фотография вершины 5 (“белая” кнопка), справа — после обработки. .	18
14	слева — исходная фотография вершины 3 (“синяя” кнопка), справа — после обработки. .	18
15	слева — исходная фотография вершины 2 (“зелёная” кнопка), справа — после обработки.	18
16	слева — исходная фотография вершины 5 (“белая” кнопка), справа — после обработки. .	19
17	слева — исходная фотография вершины 4 (“жёлтая” кнопка), справа — после обработки.	19

**Список таблиц**

1	Параметры идеальной пирамиды. . . . .	7
2	Параметры идеальной пирамиды с одинаковыми идеальными сферами в вершинах. . . . .	9
3	Вершина 1. Параметры геометрии наконечника “красной” кнопки . . . . .	13
4	Вершина 2. Параметры геометрии наконечника “зелёной” кнопки . . . . .	13
5	Вершина 3. Параметры геометрии наконечника “синей” кнопки . . . . .	13
6	Вершина 4. Параметры геометрии наконечника “жёлтой” кнопки . . . . .	14
7	Вершина 5. Параметры геометрии наконечника “белой” кнопки . . . . .	14
8	Сводная таблица измерений. . . . .	14

## 1 Вводная часть.

Сколько пространственных координат нам нужно для описания параметров тел, находящихся вокруг нас? Вряд ли кто-то будет долго думать над этим вопросом. В обычной геометрии, классической физике, инженерном деле и в быту с успехом пользуются тремя пространственными координатами. Например, “качественное” описание трёхмерности пространства даётся тройкой выражений: вперёд-назад (первое измерение), вправо-влево (второе измерение) и вверх-вниз (третье измерение). Трёх этих понятий, выраженных в математической форме как координаты в некоторой системе отсчёта, обычно хватает для описания взаимного расположения, движения и размеров тел <sup>1</sup>. Нам обычно не приходится в голову искать какую-то четвёртую, независимую от других, сторону.

Но всё это говорит лишь о том, что мы, похоже, не снабжены органами для обнаружения четвёртой координаты и в жизни мы пока не сталкивались с чем-то, для описания чего нужна была бы четвёртая координата. Однако, развитие физики в 20-м веке говорит нам, что всё может оказаться не так, как нам ощущается и представляется. Объединение пространства и времени в единое четырёхмерное пространство - время в рамках Специальной Теории Относительности Альберта Эйнштейна, попытка ввести четвёртую пространственную координату для геометрического описания электромагнитного взаимодействия, сделанную Теодором Калуцей <sup>2</sup> (этой теории Эйнштейн посвятил несколько работ), успехи теории элементарных частиц, в рамках которой 11 (одиннадцати) мерное пространство — обычная вещь <sup>3</sup>. Помимо этого, в рамках Общей Теории Относительности наше пространство ещё и искривлено <sup>4</sup>. В “обычной” квантовой механике некоторые исследователи предлагают представление о мультивселенной в попытке объяснить представление о коллапсе волновой функции. А где этим вселенным расположиться, кроме как в дополнительном измерении?

Даже столь краткий перечень научных достижений и гипотез способен заинтересовать кого угодно. Мы решили проверить: возможно ли сравнительно простыми средствами обнаружить наличие дополнительного макроскопического пространственного измерения?

Если мы живём в тонком, но в принципе обнаружимом, слое четырёхмерного пространства, то природа могла и не озаботиться тем, чтобы нам дать ощущение этого четвёртого измерения (зачем, если мы и так никуда из этого слоя не денемся?). Однако, она дала нам возможность иметь представление о многомерных пространствах (зачем, если их нет?).

Для обнаружения дополнительного пространственного измерения, мы решили провести опыт по определению четырёхмерного объёма физического тела. Если в результате проведённого исследования мы обнаружим, что четвёртая, пространственная координата всё-таки существует, то это стало бы очень важным открытием и прямым доказательством некоторых очень интересных гипотез.

Насколько нам известно, никто и никогда не пытался провести прямое измерение и вычисление действительной размерности нашего пространства. Причина этого, на наш взгляд такова — успешность трёхмерной модели пространства для практических целей. Упрощённо говоря, представление о трёхмерности пространства базируется на следующем рассуждении: все расчёты и вся наша деятельность основывается на предположении о наличии трёх макроскопических измерений (достаточность предположения в математическом смысле), и если практика показывает, что мы достигаем нужного результата, то наше предположение верно. И верно оно всегда (индукция или обобщение, не всегда работающее). Однако, если привести контрпример (ситуацию, когда предположение не работает), то это приведёт к необходимости корректировки наших представлений и предположений. Такой контрпример можно искать очень долго, но если повезёт, то он обнаружится быстро (а если повезёт ещё больше, то сразу). В надежде на то, что мы быстро обнаружим такой контрпример, мы взялись за эту работу.

<sup>1</sup> время как четвёртая координата, и ощущается нами, и описывается математически по другому.

<sup>2</sup> Эта попытка оказалась не очень удачной. Кроме того, теория электромагнетизма блестяще описывается в рамках 4-х мерного пространства-времени.

<sup>3</sup> В этой теории дополнительные измерения считаются очень малыми. Большим успехом теории считается сведение 11-ти мерного пространства к восьмимерному!

<sup>4</sup> Это искривление описывается системой уравнений Эйнштейна - Гильберта.

## 2 Теоретическая часть.

Везде в этой работе мы предполагаем, что наше пространство — обычное Евклидово пространство. Поэтому, говоря о многомерных пространствах, мы не будем упоминать о возможности их искривления.

Аналитическое описание многомерных пространств ничем не отличается от аналитического описания двумерных и трёхмерных пространств с которыми имеет дело Евклидова геометрия и аналитическая геометрия, родоначальником которой считается Рене Декарт <sup>5</sup>. При этом ясно, что описание пространств с количеством измерений 4 и выше, не может быть дано в ясной и наглядной форме, так, как это может быть сделано для двумерных и трёхмерных пространств.

Попытавшись изобразить четырёхмерную систему координат в трёхмерном пространстве, мы столкнёмся с теми же трудностями, что и при попытке изобразить на листе бумаги оси трёхмерной системы координат. Поэтому поиск направления четвёртой координаты — тупиковый путь для нашей работы.

Каждое физическое тело и его идеализированное представление в виде какой-то геометрической фигуры можно охарактеризовать набором параметров и величин, остающимися неизменными, независимо от системы координат, в которой мы описываем это тело (его форму). Так, если мы имеем дело с отрезком, то такой величиной является его длина, если речь идёт о треугольнике, то помимо длин его сторон, единственной характеристикой, описывающей его “в целом”, может быть его площадь. Для элементарной фигуры, которую можно построить в трёхмерном пространстве — пирамида с основанием в виде треугольника и ещё одной вершиной, не лежащей в плоскости основания, это обычный объём. Для простейших фигур, которые могут занимать объём в пространстве данной размерности, имеется специальное наименование - симплекс. Минимальное количество точек, образующих симплекс на 1 превосходит размерность пространства. Например, пирамидка с четырёхугольным основанием есть симплекс в четырёхмерном пространстве, и не является симплексом в трёхмерном.

Для нас важно то обстоятельство, что объём трёхмерной фигуры, площадь двумерной фигуры, длина одномерной фигуры — это просто число. Это число остаётся неизменным, как бы мы ни поворачивали нашу фигуру в пространстве. В дальнейшем будем говорить обо всех этих характеристиках, как об объёме. Объём фигуры может быть и нулевым. Так, если все точки треугольника лежат на одной прямой, то его объём равен 0 (основание на нулевую высоту пополам). Если вершина пирамиды лежит в плоскости треугольника, образующего основание, то её объём также равен 0 (площадь основания на нулевую высоту делить на три). Если вершина четырёхмерной пирамиды лежит в пространстве её трёхмерного основания, образуемого четвёркой точек основания, то её объём равен 0 (объём основания на нулевую высоту и делить уже на 4). Таким образом, объём фигуры характеризует размерность пространства, в которой расположены вершины нашей фигуры.

### 2.1 Вычисление объёма. Координатный подход.

Все необходимые определения для понимания дальнейших построений можно получить в учебнике [1]. Имеются ввиду определения понятий: векторное пространство, линейное векторное пространство, линейная зависимость и линейная независимость системы векторов, базис и координатное представление векторов в базисе, Евклидово пространство, скалярное произведение векторов, геометрическое и координатное представление скалярного произведения векторов, матрицы и матричное представление системы векторов в определённом базисе.

И, наконец, детерминант (определитель) системы векторов. Так именуется специально сконструированная функция от компонент (координат) векторов, составляющих исследуемую систему векторов. Важнейшим свойством этой функции является то, что если система векторов линейно зависима, то результат вычисления этой функции даёт 0.

Для нас важно то обстоятельство, что значение детерминанта в точности даёт объём параллелепипеда, построенного на исследуемой системе векторов ( [1]). Или объём симплекса (пирамиды),

<sup>5</sup>Картезий, как его часто называли в литературе до 20-го века. Заложил основы аналитической геометрии и понятия системы координат. Эту работу он выполнил для облегчения собственного восприятия геометрии Евклида.

выстроенной на концевых точках векторов, вычисляемый с коэффициентом  $1/N!$  от объёма параллелепипеда, где  $N$  - размерность нашего пространства.

Изобразим симплекс четырёхмерного пространства в трёхмерном пространстве в виде пирамиды с четырёхугольным основанием. Нумерация вершин основания:  $\{1, 2, 3, 4\}$  и “вершина” пирамидки —

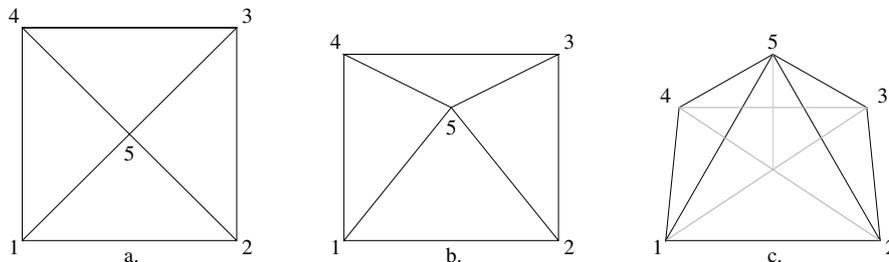


Рис. 1: Пирамида с идеальными, точечными вершинами. а. — вид сверху; б. — небольшое смещение от вертикали; с. — перспектива

номер 5. Начало системы координат разместим в точке 1 и будем предполагать, что количество измерений нашего пространства 4. Пронумеруем наши четыре вектора, концевые точки которых и образуют вершины пирамиды, парами номеров вершин, которые будем записывать в виде нижнего индекса.

$$\mathbf{r}_{1,2}, \quad \mathbf{r}_{1,3}, \quad \mathbf{r}_{1,4}, \quad \mathbf{r}_{1,5} \tag{2.1}$$

Полагая наше пространство четырёхмерным Евклидовым, будем считать, что в произвольном ортогональном базисе наши вектора имеют по четыре компонента. Номера координат будем записывать в виде верхнего индекса, а сами вектора представлять в виде координатных столбцов в выбранном базисе:

$$\mathbf{r}_{1,2} = \begin{pmatrix} r_{1,2}^1 \\ r_{1,2}^2 \\ r_{1,2}^3 \\ r_{1,2}^4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{1,3} = \begin{pmatrix} r_{1,3}^1 \\ r_{1,3}^2 \\ r_{1,3}^3 \\ r_{1,3}^4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{1,4} = \begin{pmatrix} r_{1,4}^1 \\ r_{1,4}^2 \\ r_{1,4}^3 \\ r_{1,4}^4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{1,5} = \begin{pmatrix} r_{1,5}^1 \\ r_{1,5}^2 \\ r_{1,5}^3 \\ r_{1,5}^4 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

и составим следующую матрицу размером  $4 \times 4$ , обозначая её  $\hat{a}$

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} r_{1,2}^1 & r_{1,3}^1 & r_{1,4}^1 & r_{1,5}^1 \\ r_{1,2}^2 & r_{1,3}^2 & r_{1,4}^2 & r_{1,5}^2 \\ r_{1,2}^3 & r_{1,3}^3 & r_{1,4}^3 & r_{1,5}^3 \\ r_{1,2}^4 & r_{1,3}^4 & r_{1,4}^4 & r_{1,5}^4 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Вычисление объёма нашей пирамиды сводится к вычислению детерминанта этой матрицы и делению его на  $4!$ :

$$Vol = \frac{1}{4!} \det(\hat{a}) = \frac{1}{4!} \begin{vmatrix} r_{1,2}^1 & r_{1,3}^1 & r_{1,4}^1 & r_{1,5}^1 \\ r_{1,2}^2 & r_{1,3}^2 & r_{1,4}^2 & r_{1,5}^2 \\ r_{1,2}^3 & r_{1,3}^3 & r_{1,4}^3 & r_{1,5}^3 \\ r_{1,2}^4 & r_{1,3}^4 & r_{1,4}^4 & r_{1,5}^4 \end{vmatrix} \tag{2.4}$$

Однако, итоговое выражение будет записано через координаты векторов в четырёхмерном пространстве. Мы их, разумеется, не знаем. Нам необходимо перейти к записи этого выражения через длины векторов.

## 2.2 Представление объёма пирамиды через длины векторов.

Для перехода к вычислению объёма через длины векторов, воспользуемся следующими свойствами определителей и матриц, на которых они построены:

$$\begin{aligned} \det(\hat{a}) &= \det(\hat{a}^T) \\ \det(\hat{a} \cdot \hat{b}) &= \det(\hat{a}) \cdot \det(\hat{b}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

, где  $\hat{a}$  и  $\hat{b}$  - произвольные квадратные матрицы.

Выпишем произведение двух матриц  $\hat{a}^T \cdot \hat{a}$ , составленное по обычным правилам матричного произведения. В результате мы получим квадратную матрицу, элементами которой будут скалярные произведения наших векторов.

$$\hat{a}^T \cdot \hat{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{1,2}\mathbf{r}_{1,2} & \mathbf{r}_{1,2}\mathbf{r}_{1,3} & \mathbf{r}_{1,2}\mathbf{r}_{1,4} & \mathbf{r}_{1,2}\mathbf{r}_{1,5} \\ \mathbf{r}_{1,3}\mathbf{r}_{1,2} & \mathbf{r}_{1,3}\mathbf{r}_{1,3} & \mathbf{r}_{1,3}\mathbf{r}_{1,4} & \mathbf{r}_{1,3}\mathbf{r}_{1,5} \\ \mathbf{r}_{1,4}\mathbf{r}_{1,2} & \mathbf{r}_{1,4}\mathbf{r}_{1,3} & \mathbf{r}_{1,4}\mathbf{r}_{1,4} & \mathbf{r}_{1,4}\mathbf{r}_{1,5} \\ \mathbf{r}_{1,5}\mathbf{r}_{1,2} & \mathbf{r}_{1,5}\mathbf{r}_{1,3} & \mathbf{r}_{1,5}\mathbf{r}_{1,4} & \mathbf{r}_{1,5}\mathbf{r}_{1,5} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Воспользовавшись свойствами (2.5), получим промежуточное выражение для квадрата объёма нашей пирамиды:

$$F = Vol^2 = \frac{1}{(4!)^2} \begin{vmatrix} \mathbf{r}_{1,2}\mathbf{r}_{1,2} & \mathbf{r}_{1,2}\mathbf{r}_{1,3} & \mathbf{r}_{1,2}\mathbf{r}_{1,4} & \mathbf{r}_{1,2}\mathbf{r}_{1,5} \\ \mathbf{r}_{1,3}\mathbf{r}_{1,2} & \mathbf{r}_{1,3}\mathbf{r}_{1,3} & \mathbf{r}_{1,3}\mathbf{r}_{1,4} & \mathbf{r}_{1,3}\mathbf{r}_{1,5} \\ \mathbf{r}_{1,4}\mathbf{r}_{1,2} & \mathbf{r}_{1,4}\mathbf{r}_{1,3} & \mathbf{r}_{1,4}\mathbf{r}_{1,4} & \mathbf{r}_{1,4}\mathbf{r}_{1,5} \\ \mathbf{r}_{1,5}\mathbf{r}_{1,2} & \mathbf{r}_{1,5}\mathbf{r}_{1,3} & \mathbf{r}_{1,5}\mathbf{r}_{1,4} & \mathbf{r}_{1,5}\mathbf{r}_{1,5} \end{vmatrix} \quad (2.7)$$

где  $F$  — символическое обозначение для квадрата объёма пирамиды, построенной на наших векторах, а матрица, записанная внутри вертикальных скобок, представляет символическую запись определителя, построенного на элементах этой матрицы.

В Евклидовом пространстве для любой пары векторов имеет место соотношение

$$(\mathbf{r}_{1,i} - \mathbf{r}_{1,j})^2 = \mathbf{r}_{i,j}^2 = \mathbf{r}_{1,i}^2 + \mathbf{r}_{1,j}^2 - 2\mathbf{r}_{1,i}\mathbf{r}_{1,j} \quad (2.8)$$

Следовательно, мы можем выразить скалярное произведение пары векторов через квадраты длин векторов, образующих треугольник

$$\mathbf{r}_{1,i}\mathbf{r}_{1,j} = \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{1,i}^2 + \mathbf{r}_{1,j}^2 - \mathbf{r}_{i,j}^2) \quad (2.9)$$

и выражение для квадрата объёма фигуры можно переписать через значения квадратов расстояний между всеми парами точек

$$F = \frac{1}{(4!)^2} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} (2\mathbf{r}_{1,2}^2) & \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{1,2}^2 + \mathbf{r}_{1,3}^2 - \mathbf{r}_{2,3}^2) & \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{1,2}^2 + \mathbf{r}_{1,4}^2 - \mathbf{r}_{2,4}^2) & \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{1,2}^2 + \mathbf{r}_{1,5}^2 - \mathbf{r}_{2,5}^2) \\ \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{1,2}^2 + \mathbf{r}_{1,3}^2 - \mathbf{r}_{2,3}^2) & \frac{1}{2} (2\mathbf{r}_{1,3}^2) & \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{1,3}^2 + \mathbf{r}_{1,4}^2 - \mathbf{r}_{3,4}^2) & \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{1,3}^2 + \mathbf{r}_{1,5}^2 - \mathbf{r}_{3,5}^2) \\ \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{1,2}^2 + \mathbf{r}_{1,4}^2 - \mathbf{r}_{2,4}^2) & \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{1,3}^2 + \mathbf{r}_{1,4}^2 - \mathbf{r}_{3,4}^2) & \frac{1}{2} (2\mathbf{r}_{1,4}^2) & \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{1,4}^2 + \mathbf{r}_{1,5}^2 - \mathbf{r}_{4,5}^2) \\ \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{1,2}^2 + \mathbf{r}_{1,5}^2 - \mathbf{r}_{2,5}^2) & \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{1,3}^2 + \mathbf{r}_{1,5}^2 - \mathbf{r}_{3,5}^2) & \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{1,4}^2 + \mathbf{r}_{1,5}^2 - \mathbf{r}_{4,5}^2) & \frac{1}{2} (2\mathbf{r}_{1,5}^2) \end{vmatrix} \quad (2.10)$$

Вынося общие множители  $\frac{1}{2}$  для каждого столбца, перепишем финальное выражение для квадрата объёма нашей пирамиды:

$$F = Vol^2 = \frac{1}{2^4} \frac{1}{(4!)^2} \begin{vmatrix} 2\mathbf{r}_{1,2}^2 & \mathbf{r}_{1,2}^2 + \mathbf{r}_{1,3}^2 - \mathbf{r}_{2,3}^2 & \mathbf{r}_{1,2}^2 + \mathbf{r}_{1,4}^2 - \mathbf{r}_{2,4}^2 & \mathbf{r}_{1,2}^2 + \mathbf{r}_{1,5}^2 - \mathbf{r}_{2,5}^2 \\ \mathbf{r}_{1,2}^2 + \mathbf{r}_{1,3}^2 - \mathbf{r}_{2,3}^2 & 2\mathbf{r}_{1,3}^2 & \mathbf{r}_{1,3}^2 + \mathbf{r}_{1,4}^2 - \mathbf{r}_{3,4}^2 & \mathbf{r}_{1,3}^2 + \mathbf{r}_{1,5}^2 - \mathbf{r}_{3,5}^2 \\ \mathbf{r}_{1,2}^2 + \mathbf{r}_{1,4}^2 - \mathbf{r}_{2,4}^2 & \mathbf{r}_{1,3}^2 + \mathbf{r}_{1,4}^2 - \mathbf{r}_{3,4}^2 & 2\mathbf{r}_{1,4}^2 & \mathbf{r}_{1,4}^2 + \mathbf{r}_{1,5}^2 - \mathbf{r}_{4,5}^2 \\ \mathbf{r}_{1,2}^2 + \mathbf{r}_{1,5}^2 - \mathbf{r}_{2,5}^2 & \mathbf{r}_{1,3}^2 + \mathbf{r}_{1,5}^2 - \mathbf{r}_{3,5}^2 & \mathbf{r}_{1,4}^2 + \mathbf{r}_{1,5}^2 - \mathbf{r}_{4,5}^2 & 2\mathbf{r}_{1,5}^2 \end{vmatrix} \quad (2.11)$$

В такой записи функция  $F$  зависит только от квадратов длин попарных расстояний между пятью точками и не содержит координат этих точек. Следовательно, мы можем получить ответ о зависимости или независимости нашей системы из четырёх векторов имея только набор из десяти попарных расстояний между пятью точками.

Явное выражение для  $F$ , записанное в виде суммы в развёрнутом виде содержит 130 (сто тридцать) слагаемых и мы даже не станем его приводить, поскольку оно занимает целую страницу.

Имея перед собой столь громоздкое выражение, становится ясно, что для проведения вычислений необходимо воспользоваться каким-то средством программирования, позволяющим сравнительно просто проводить как символьные, так и численные расчёты.

### 2.3 Программные средства для расчётов.

В качестве такого средства была использована система символьных вычислений MUPAD, являющаяся частью системы MATLAB R2012a. Эта система предназначена как для матричных вычислений в символьном виде, так и удобна для числовых вычислений. В ней очень удобно выполнять подстановки числовых значений конкретных переменных в символьные выражения. Точность вычислений также контролируется заданием общего количества знаков, принимаемых во внимание.

В этой же системе можно проводить символьное дифференцирование весьма сложных функций, находя их частные производные.

### 2.4 Решение задачи в идеальном приближении.

Для упрощения будем рассматривать пирамиду со следующими параметрами: основание пирамиды — плоский (!) квадрат, высота пирамиды  $h$ , опущенная из вершины 5 попадает в точку пересечения диагоналей основания. И положим, что для геометрии нашей пирамиды выполняются соотношения

$$h = r_{1,3}/2 = r_{2,4}/2 \quad (2.12)$$

В таком случае, для всех попарных расстояний можно выписать такую табличку 1 “идеальных” измерений расстояний

Таблица 1: Параметры идеальной пирамиды.

$r_{1,2}$	$r_{2,3}$	$r_{3,4}$	$r_{1,4}$	$r_{1,3}$	$r_{2,4}$	$r_{1,5}$	$r_{3,5}$	$r_{2,5}$	$r_{4,5}$
$\sqrt{2}h$	$\sqrt{2}h$	$\sqrt{2}h$	$\sqrt{2}h$	$2h$	$2h$	$\sqrt{2}h$	$\sqrt{2}h$	$\sqrt{2}h$	$\sqrt{2}h$

Простая подстановка в (2.11) даёт для определителя выражение

$$\begin{vmatrix} 4h^2 & 4h^2 & 0 & 2h^2 \\ 4h^2 & 8h^2 & 4h^2 & 4h^2 \\ 0 & 4h^2 & 4h^2 & 2h^2 \\ 2h^2 & 4h^2 & 2h^2 & 4h^2 \end{vmatrix} \quad (2.13)$$

из которого без всяких вычислений видно, что он равен 0. В самом деле: вычитая из второго столбца первый, получим столбец, равный третьему, что означает равенство нулю определителя.

### 2.5 Решение задачи в первом приближении. Корректировка программы вычислений.

Как мы знаем, формы реальных тел далеки от идеала. Вершины многогранников невозможно сделать идеальными. В самом лучшем случае при достаточно большом увеличении они представляют собой достаточно ровные участки закруглённых поверхностей. При ещё большем увеличении “ландшафт” поверхности начинает напоминать изрезанную рытвинами и канавами поверхность земли. Всё

зависит от качества обработки поверхности. Однако, чтобы представить трудности, с которыми мы столкнёмся, нет необходимости забираться так глубоко.

Представим себе, что в вершинах нашей пирамиды расположены сферы различных, но малых по сравнению с длинами рёбер, радиусов. На рисунке 2 эти сферы изображены сплошными серыми окружностями одинакового радиуса (для простоты) на проекции сверху в левой части. Нетрудно заметить, что проводя измерения расстояния между любой парой вершин, к примеру  $r_{1,2}$ , мы сможем измерить только с определённой точностью. Точность такого измерения определится как размерами сфер, о которых мы ничего определённого сказать не можем (до некоторого момента), точностью самого измерительного инструмента и случайными ошибками измерения, вносимыми экспериментатором. Два последних типа ошибки будут присутствовать и в случае идеально обработанной поверхности. Но в данный момент нас интересует только ошибка первого типа.

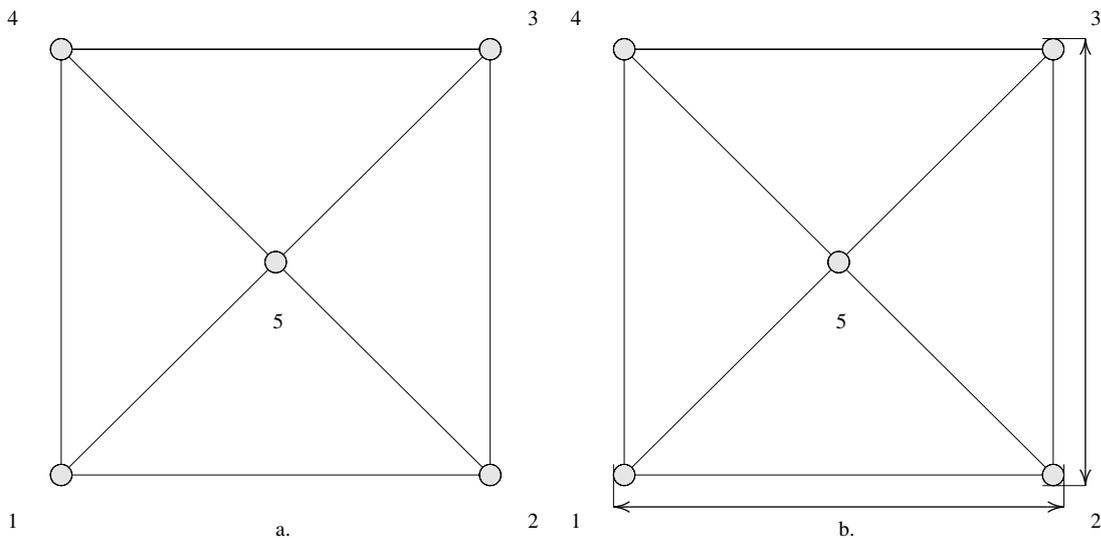


Рис. 2: Пирамида с неидеальными вершинами в виде сфер. а. — вид сверху; б. — предполагаемые измерения;

Предположим измерения  $r_{1,2}$  проводятся штангельциркулем так: измеряется наружное расстояние между вершинами (1, 2) и тем же способом измеряется расстояние между вершинами (2, 3). На поверхности сферы 2 можно мысленно отметить две несовпадающие точки, которых касаются “щёчки” штангельциркуля. Такая же неприятность имеет место и для всех других измерений: на поверхности каждой сферы будут отмечены по 4 различные точки, являющиеся концами измеряемых нами отрезков. В результате, все 10 попарных расстояний будут отличаться от истинного значения на величину диаметра сферы (если все сферы одинаковы).

Полученные нами измерения не будут относиться к исходной замкнутой фигуре, размеры которой мы хотим промерить и убедиться в справедливости предположения о трёхмерности пространства. Понятно, что результаты измерений должны быть скорректированы с учётом размеров сфер. Точнее, с учётом формы всех вершин, которые не будут идеальными сферами.

В нашем, всё ещё идеальном, случае для каждой вершины все четыре измеренных отрезка пересекутся в одной точке, соответствующей идеально выполненной пирамиде. Если же вершины пирамидки имеют неправильную форму, как это и ожидается и как это имеет место в реальных измерениях, то четыре отрезка, соответствующие нашим измерениям, в общем случае не пересекутся в одной точке. Область, в которой они проходят наиболее близко друг от друга, конечно и можно попытаться определить точку и шар минимального радиуса с центром в этой точке, через который все четыре отрезка будут проходить. Такую точку можно считать вершиной идеальной фигуры, для которой мы и будем считать объём, а значит и определять размерность нашего пространства.

Если вычисленный объём лежит в пределах допустимых отклонений, то для нашей пирамиды

мы можем говорить о том, что четырёхмерный объём равен нулю, если же нет, то необходимы дополнительные проверки и измерения, и если они подтверждают наш результат, то открытие можно считать состоявшимся.

Таким образом, в любом случае нам будет полезно увидеть как влияет неидеальность нашей пирамиды на результат вычислений. Составим скорректированную таблицу измеренных расстояний

Таблица 2: Параметры идеальной пирамиды с одинаковыми идеальными сферами в вершинах.

$r_{1,2}$	$r_{2,3}$	$r_{3,4}$	$r_{1,4}$	$r_{1,3}$	$r_{2,4}$	$r_{1,5}$	$r_{3,5}$	$r_{2,5}$	$r_{4,5}$
$\sqrt{2h+d}$	$\sqrt{2h+d}$	$\sqrt{2h+d}$	$\sqrt{2h+d}$	$2h+d$	$2h+d$	$\sqrt{2h+d}$	$\sqrt{2h+d}$	$\sqrt{2h+d}$	$\sqrt{2h+d}$

и подставим эти значения в функцию (2.11). В результате, получим довольно длинное выражение из которого приведём только член, линейный по  $d$ :

$$F = \frac{1}{18} h^7 (\sqrt{2} - 1) d$$

При размере  $h = 25 \text{ mm}$  получим  $F = 1.4 \cdot 10^8 \cdot d \text{ mm}^7$ . Если  $d = 0.03 \text{ mm}$ , то порядок величины квадрата симплекса в идеальном случае составит  $5 \cdot 10^6 \text{ mm}^8$ . Поскольку характерный размер (высота) изготовленной нами пирамидки составляет примерно  $25 \text{ mm}$ , а заявленная точность производителя измерительного оборудования составляет как раз  $0.03 \text{ mm}$ , то полученная оценка четырёхмерного объёма задаёт границу, за которой начинаются отклонения от трёхмерности.

Очень важно помнить, что полученная нами оценка верна для идеального случая. В реальности значение  $F$  может при вычислениях оказаться отрицательным из-за экспериментальных ошибок. В самом деле, важно помнить, что  $F \stackrel{\text{def}}{=} F(r_{1,2}, r_{1,3}, r_{1,4}, r_{1,5}, r_{2,3}, r_{2,4}, r_{2,5}, r_{3,4}, r_{3,5}, r_{4,5})$  — функция от 10 переменных, означающих попарные расстояния между вершинами пирамиды. Эти расстояния измеряются нами независимо друг от друга. Следовательно, малые отклонения от истинного значения для каждой переменной можно учесть, вычисляя частные производные по этой переменной. Всего их 10. Запишем в общем виде выражение для вычисления изменения  $F$  в первом приближении по отклонениям:

$$\delta(F) = \frac{\partial F}{\partial r_{1,2}} (\pm \delta_{1,2}) + \frac{\partial F}{\partial r_{1,3}} (\pm \delta_{1,3}) + \dots + \frac{\partial F}{\partial r_{4,5}} (\pm \delta_{4,5}) \quad (2.14)$$

всего десять слагаемых для каждого  $r_{i,j} : j > i$  и  $\delta_{i,j} : j > i$  — ошибка измерения для соответствующего расстояния, которая может быть как положительной, так и отрицательной. Кроме того, разные частные производные после подстановки действительных измерений могут иметь различные знаки. И вполне возможно, что в результате эксперимента мы получим для квадрата объёма отрицательное значение. Ведь ожидаемая величина 0, а отклонения от 0 могут быть в обе стороны.

В заключение этого раздела скажем, что частные производные вычисляются программно в символьном виде, а ошибки определяются экспериментально. Измеренные расстояния и ошибки подставляются затем в программу и вычисляется конечный результат.

## 3 Практическая часть.

### 3.1 Выбор объекта измерения.

Для проведения эксперимента необходимо подобрать тело, расстояния между точками которого мы будем измерять. Оно должно иметь несколько особенных свойств, иначе провести эксперимент с достаточной точностью не получится.

Во-первых, тело должно быть крепким, немнущимся. В самом деле, взяв, например, бумажную фигуру, мы непременно сомнём её, даже если будем с ней обращаться аккуратно. Это приведёт к изменению расстояний между точками, а значит, наши вычисления дадут неверный результат. В идеале нужно использовать стальную фигуру.

Во-вторых, у тела должны быть явно определены точки, расстояния между которыми мы будем мерять, причём точки эти должны быть максимально близкими к материальным. Так, например, взяв для измерений яблоко, мы с огромной долей вероятности просто-напросто не попадём несколько раз в одну и ту же точку, т.е. мы всё время будем измерять расстояния между разными точками.

В-третьих, тело должно быть удобным для измерений; оно не должно быть слишком маленьким или слишком большим. Расстояния между точками слишком большого тела очень трудно измерить, а для нахождения размера маленького тела нужна очень высокая точность.

Сначала мы попробовали изготовить пирамиду из глины, но оказалось, что она не обладает ни одним из нужных нам свойств. Глина очень легко осыпается, поэтому точки просто-напросто отваливались, что привело к невозможности измерений.

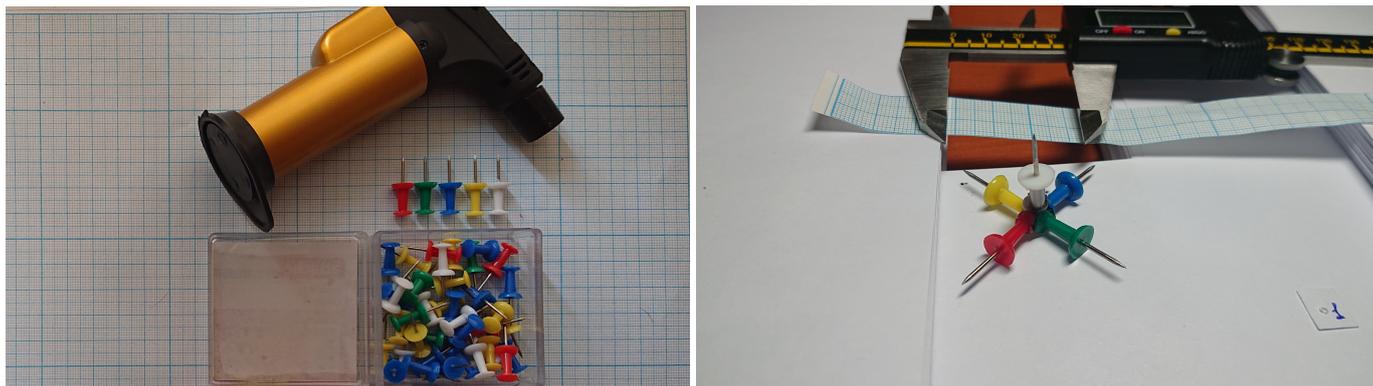


Рис. 3: Силовые канцелярские кнопки - слева и измеряемая пирамида (результат спайки) - справа.

Затем мы взяли несколько силовых канцелярских скрепок и сделали из них несколько пирамид с помощью спайки: пластик на двух кнопках расплавлялся с помощью зажигалки или спички, что позволяло их скрепить. Проблема этого способа изготовления состояла в том, что пирамида не получалась правильной. Тогда мы сделали из пластилина форму и попытались спаять все кнопки сразу, но из-за свойств пластика кнопки просто не держались, поэтому мы вернулись к предыдущему способу изготовления фигуры. Первые две пирамиды не имели второго свойства, то есть концы кнопок были плохо заточены, поэтому пришлось изготовить новые, с учётом формы наконечников кнопок. Кнопки специально подбирались разных цветов для того, чтобы наконечники возможно было различать (Рис. 3 на стр. 10). Полученные тела обладают нужными нам свойствами. Они достаточно крепкие, чтобы считать, что расстояния между точками неизменны, концы кнопок достаточно острые (одну кнопку пришлось подточить), а компактные размеры позволили удобно проводить измерения.

### 3.2 Описание измерительной “установки” и инструментов измерений.

Измерительная установка представляет собой совокупность установки позиционирования объекта и непосредственно измерительного прибора.

Каждый из этих элементов является необходимым для проведения эксперимента, и для выбора реализации каждого есть аргументация. Установка позиционирования объекта представляет собой 4 подставки регулируемой высоты, по две из которых предназначены для удержания объекта измерений и измерительного прибора друг относительно друга (см. Рис. 4 на стр. 11 — левое фото). Регуляция высоты подставок осуществляется посредством изменения количества модулей (листов бумаги) и позволяет изменять высоту и угол удержания объекта измерений и измерительного прибора относительно друг друга и, при необходимости, других объектов. Изначально мы попытались изготовить подставки из бумаги и пластилина, но такая установка оказалась очень неудобной и неустойчивой.

Измерительный прибор (см. Рис. 4 на стр. 11 — правое фото) представляет собой электронный штангенциркуль. Его заявленная точность 0.03 мм позволяет совершать достаточно точные измерения даже при ограниченности бюджета исследований.

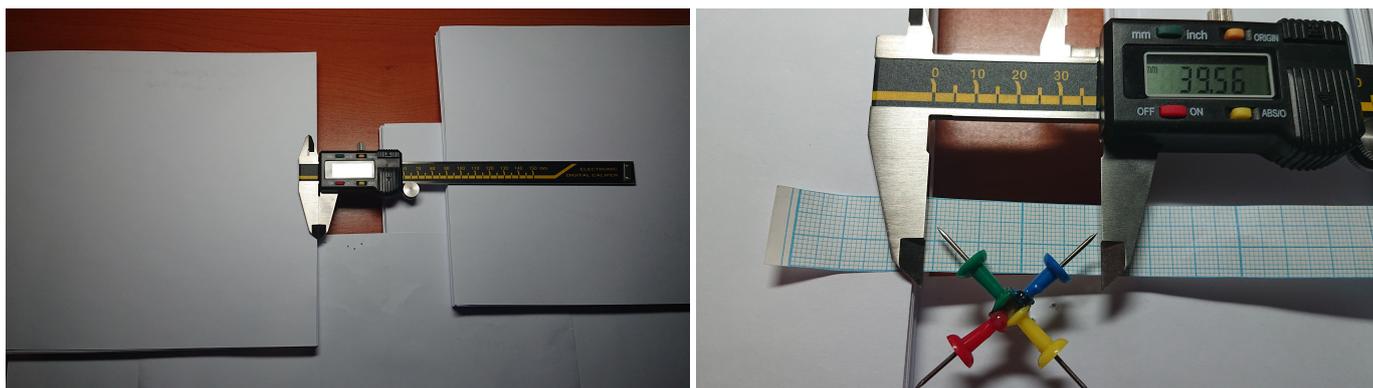


Рис. 4: Измерительный “стол” со штангельциркулем и общий вид с пирамидкой и контрольной полосой миллиметровки и штангельциркулем в процессе измерения

### 3.3 Процесс измерений расстояний.

Этот же рисунок позволяет легко представить процесс измерений и предосторожности, которые требуется соблюдать, чтобы получить минимально искажённый результат. Измерения следует фиксировать в момент, когда оба конца кнопок прикоснулись к внутренним поверхностям измерительных “щёчек” штангельциркуля. Приводя в соприкосновение с одной из “щёчек” одну кнопку, вторую кнопку оставляем свободной. Сдвигаем “щёчки” штангельциркуля с дотаточно малым шагом (0.02 мм) и проверяем не коснулась ли вторая кнопка поверхности второй щёчки. Поскольку измерительные поверхности хорошо отполированы, то момент касания определялся “соприкосновением” отражения наконечника кнопки и самой кнопки. Контроль осуществлялся через камеру телефона с 8-микратным увеличением и фотографированием зазора, как это отображено на рисунке (5) Также из этого рисун-

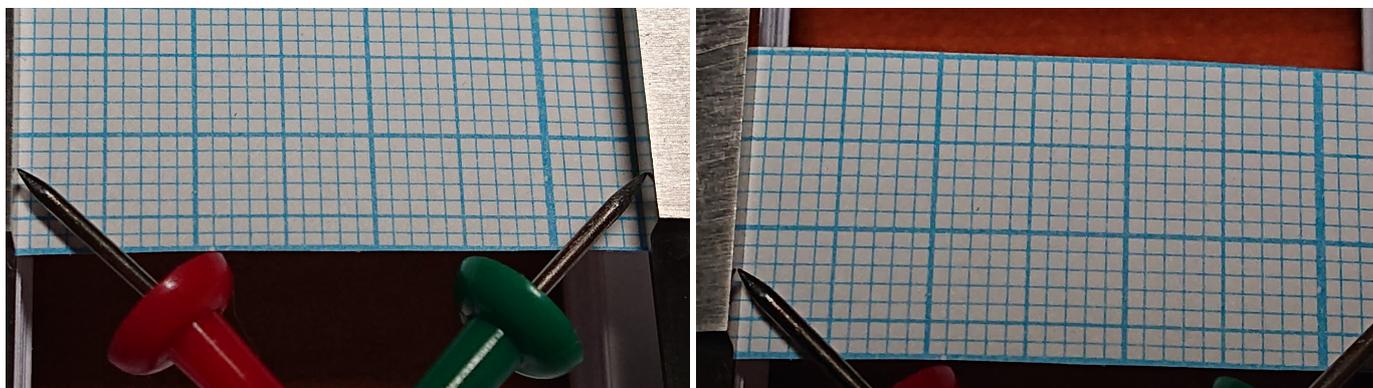


Рис. 5: Стандартный вид измерения расстояния между парой вершин слева и контроль зазора на правой фотографии

ка ясно, для чего нужна контрольная полоска миллиметровой бумаги — линия, соединяющая концы кнопок должна быть почти ортогональна к измерительным поверхностям для минимизации ошибки, связанной с наклоном измеряемого “отрезка”. Похожим образом контролировалось отклонение от ортогональности и в другой плоскости. Только там “на глаз” оба конца выставлялись по отношению к “толщине” измерительных поверхностей (“высота” щёчек около 3 мм и мы посчитали, что такого способа будет достаточно). Процесс сближения повторялся многократно, до тех по, пока удавалось детектировать зазор. После того, как процесс завершался, дополнительный контроль касания проводился так: проверялась возможность “свободного” вращения пирамидки вокруг оси крепления в малом диапазоне углов. Если пирамидка вращалась слегка задевая измерительные “щёчки”, то слышался характерный царапающий звук и это царапанье ощущалось тактильно. Убедившись, что касание имеет место, мы пытались увеличивать показания расстояния с шагом 0.01 мм, повторяя проверки. Убедившись, что касание исчезло, записывали предпоследнее показание.

### 3.4 Измерения геометрии наконечников кнопок.

Наконечники кнопок достаточно малы — около 0.1 мм. Чтобы изучить параметры их геометрии необходимо достаточное увеличение. Чтобы его добиться, мы поступали так: каждый наконечник ориентировался параллельно линиям миллиметровой бумаги. С небольшого расстояния он фотографировался на камеру телефона с максимальным 8-микратным увеличением. После этого в стандартной программе Paint3D ОС Windows вырезался прямоугольный участок фотографии наконечника, который обязательно должен был содержать хотя бы одну полную миллиметровую клетку для последующего определения масштаба, проводилась “заливка” затенённых участков наконечника (чтобы было видно пересечение рисуемых прямых), затем по диагоналям миллиметровых клеток в этой же программе проводились отрезки, имитирующие измерительные “щёчки” и сдвигались до касания с изображением. Аналогично проводилась горизонтальная линия и сдвигалась до касания с изображением, имитируя поведение “щёчки” при измерениях противоположных вершин.

Из точек касания строились ортогональные отрезки, имитирующие направление к парной вершине, для которой мы проводим наше “виртуальное” измерение. В идеале все отрезки должны пересечься в одной точке, обозначающей вершину идеальной пирамиды. На практике, естественно, этого не происходило. Но все отрезки на одном рисунке почти всегда проходили близко друг к другу. Затем полученное изображение распечатывалось на листе формата А4 и проводились измерения между прорисованными параллельными отрезками, а также измерялся масштаб изображения по очень большим миллиметровым клеткам. Все 10 пар изображений приведены в Приложении. Для каждой вершины

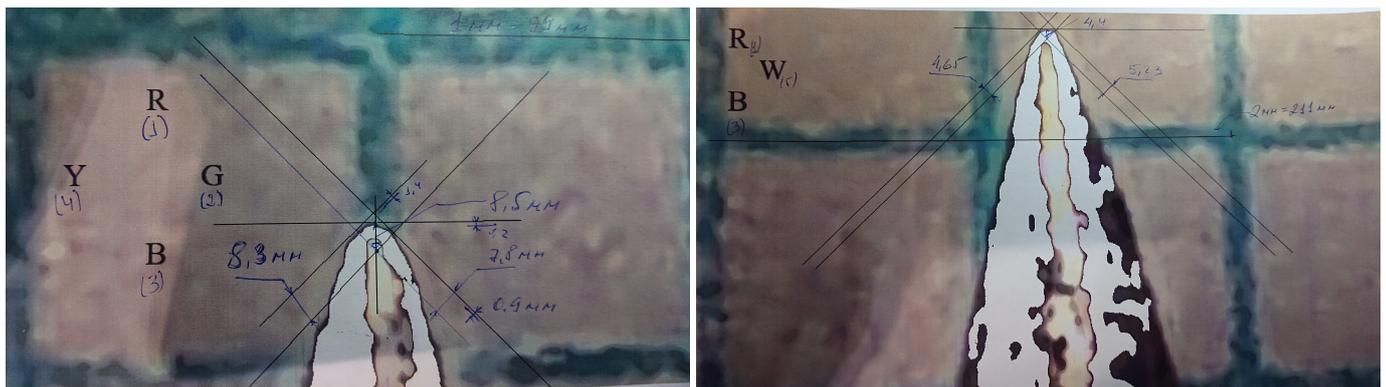


Рис. 6: Пример обработки пары изображений для вершины 1. Красная кнопка.

измерения проводились как бы в двух плоскостях (если отвлечься от того, что четыре вершины основания не лежат в одной плоскости) — плоскости основания и плоскости “ортогональной” основанию. При этом смещение “истинной” вершины от конца наконечника получалось разным.

Результаты этих измерений сведены в пять таблиц — по два измерения на каждую таблицу. Введённые обозначения после данных пояснений легко читаются. В последней таблице даны сводные результаты измерений.

Помимо средних смещений от поверхности  $d_{i,j}$  определены и величины  $\delta_{i,j}$ , которые характеризуют неточность в определении местоположения “истинной” вершины. Другими словами, эти отклонения дают представление о характерном размере идеальной сферы (или эллипсоида), о которой шла речь ранее в разделе (2.5).

$Sc$  - масштаб изображения на конкретном рисунке;

$(i, j) \in (1, 2, 3, 4, 5)$  - значения индексов, обозначающих номер вершины;

$d_{i,j}^{foto}$  - смещение от вершины с номером  $i$  до вершины с номером  $j$  на обрабатываемой распечатанной фотографии;

$d_{i,j} = d_{i,j}^{foto} \cdot Sc$  - смещение от вершины с номером  $i$  до вершины с номером  $j$  в реальности с учётом масштаба;

$\overline{d_{i,j}}$  - среднее значение смещения от от вершины с номером  $i$  до вершины с номером  $j$ ;

$\delta_{i,j}$  - отклонение от среднего смещения.

Таблица 3: Вершина 1. Параметры геометрии наконечника “красной” кнопки

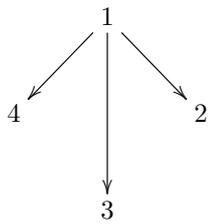
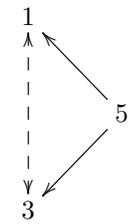
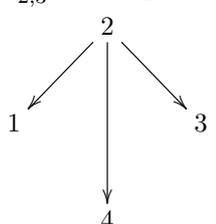
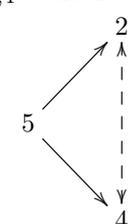
$r_{1,2} = 34.57 \text{ mm}$ 	$Sc = 1 \text{ mm}/99 \text{ mm}$ $d_{1,3}^{foto} = 8.5 \text{ mm}$ $d_{1,2}^{foto} = 8.3 \text{ mm}$ $d_{1,4}^{foto} = 7.8 \text{ mm}$ <hr/> $d_{1,3} = 0.086 \text{ mm}$ $d_{1,2} = 0.084 \text{ mm}$ $d_{1,4} = 0.079 \text{ mm}$	$r_{1,5} = 34.33 \text{ mm}$ 	$Sc = 2 \text{ mm}/211 \text{ mm}$ $d_{1,3}^{foto} = 4.4 \text{ mm}$ $d_{1,5}^{foto} = 4.65 \text{ mm}$ <hr/> $d_{1,3}^{(2)} = 0.042 \text{ mm}$ $d_{1,5} = 0.044 \text{ mm}$ <hr/> $\text{---} = \text{---}$
$\overline{d_{1,3}} = (d_{1,3} + d_{1,3}^{(2)}) / 2 = 0.064 \text{ mm}$		$\delta_{1,3} = 0.022 \text{ mm}$	
$\overline{d_{1,2}} = d_{1,2} - \delta_{1,2} = 0.084 - 0.016 = 0.068 \text{ mm}$		$\delta_{1,2} = \delta_{1,3} / \sqrt{2} = 0.022 / \sqrt{2} = 0.016 \text{ mm}$	
$\overline{d_{1,4}} = d_{1,4} - \delta_{1,4} = 0.079 - 0.016 = 0.063 \text{ mm}$		$\delta_{1,4} = \delta_{1,3} / \sqrt{2} = 0.022 / \sqrt{2} = 0.016 \text{ mm}$	

Таблица 4: Вершина 2. Параметры геометрии наконечника “зелёной” кнопки

$r_{2,3} = 35.92 \text{ mm}$ 	$Sc = 1 \text{ mm}/98 \text{ mm}$ $d_{2,4}^{foto} = 8.7 \text{ mm}$ $d_{2,3}^{foto} = 8.65 \text{ mm}$ $d_{2,1}^{foto} = 8.65 \text{ mm}$ <hr/> $d_{2,4} = 0.089 \text{ mm}$ $d_{2,3} = 0.088 \text{ mm}$ $d_{2,1} = 0.088 \text{ mm}$	$r_{2,4} = 49.15 \text{ mm}$ 	$Sc = 2 \text{ mm}/260 \text{ mm}$ $d_{2,4}^{foto} = 6.68 \text{ mm}$ $d_{2,5}^{foto} = 7.6 \text{ mm}$ <hr/> $d_{2,4}^{(2)} = 0.051 \text{ mm}$ $d_{2,5} = 0.059 \text{ mm}$ <hr/> $\text{---} = \text{---}$
$\overline{d_{2,4}} = (d_{2,4} + d_{2,4}^{(2)}) / 2 = 0.07 \text{ mm}$		$\delta_{2,4} = 0.019 \text{ mm}$	
$\overline{d_{2,3}} = d_{2,3} - \delta_{2,3} = 0.088 - 0.014 = 0.074 \text{ mm}$		$\delta_{2,3} = \delta_{2,4} / \sqrt{2} = 0.019 / \sqrt{2} = 0.014 \text{ mm}$	
$\overline{d_{2,1}} = d_{2,1} - \delta_{2,1} = 0.088 - 0.014 = 0.074 \text{ mm}$		$\delta_{2,1} = \delta_{2,4} / \sqrt{2} = 0.019 / \sqrt{2} = 0.014 \text{ mm}$	

Необходимые пояснения. В таблице (7) в правой колонке введено обозначение  $\delta_{5,0}$ . Цифрой 0 обозначена воображаемая точка пересечения диагоналей “квадрата” основания. И  $\delta_{5,0}$  — смещение к этой точке, то есть “вниз”.

Происхождение множителя  $1/\sqrt{2}$  при вычислениях ошибок ясно из геометрических соображений: сдвиг вдоль осей (1, 3), (2, 4), (5, 0) (гипотенузы) приводит к меньшим сдвигам по осям (2, 3), (3, 4), ... (катеты).

Таблица 5: Вершина 3. Параметры геометрии наконечника “синей” кнопки

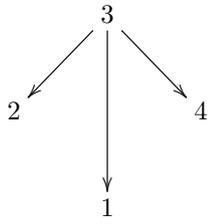
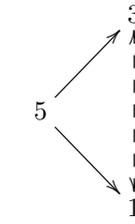
$r_{3,4} = 34.38 \text{ mm}$ 	$Sc = 2 \text{ mm}/268 \text{ mm}$ $d_{3,1}^{foto} = 5.75 \text{ mm}$ $d_{3,4}^{foto} = 7.4 \text{ mm}$ $d_{3,2}^{foto} = 7.1 \text{ mm}$ <hr/> $d_{3,1} = 0.043 \text{ mm}$ $d_{3,4} = 0.056 \text{ mm}$ $d_{3,2} = 0.053 \text{ mm}$	$r_{1,3} = 50.91 \text{ mm}$ 	$Sc = 1 \text{ mm}/130 \text{ mm}$ $d_{3,1}^{foto} = 7.8 \text{ mm}$ $d_{3,5}^{foto} = 8.3 \text{ mm}$ <hr/> $d_{3,1}^{(2)} = 0.06 \text{ mm}$ $d_{3,5} = 0.064 \text{ mm}$ <hr/> $\text{---} = \text{---}$
$\overline{d_{3,1}} = (d_{3,1} + d_{3,1}^{(2)}) / 2 = 0.052 \text{ mm}$		$\delta_{3,1} = -0.008 \text{ mm}$	
$\overline{d_{3,4}} = d_{3,4} - \delta_{3,4} = 0.056 + 0.006 = 0.062 \text{ mm}$		$\delta_{3,4} = \delta_{3,1} / \sqrt{2} = -0.008 / \sqrt{2} = -0.006 \text{ mm}$	
$\overline{d_{3,2}} = d_{3,2} - \delta_{3,2} = 0.053 + 0.006 = 0.059 \text{ mm}$		$\delta_{3,2} = \delta_{3,1} / \sqrt{2} = -0.008 / \sqrt{2} = -0.006 \text{ mm}$	

Таблица 6: Вершина 4. Параметры геометрии наконечника “жёлтой” кнопки

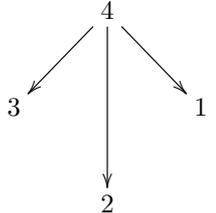
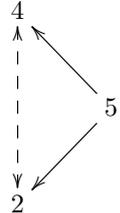
$r_{1,4} = 36.79 \text{ mm}$ 	$Sc = 2 \text{ mm}/157 \text{ mm}$ $d_{4,2}^{foto} = 8.8 \text{ mm}$ $d_{4,1}^{foto} = 8.9 \text{ mm}$ $d_{4,3}^{foto} = 7.36 \text{ mm}$ <hr/> $d_{4,2} = 0.113 \text{ mm}$ $d_{4,1} = 0.114 \text{ mm}$ $d_{4,3} = 0.094 \text{ mm}$	$r_{2,4} = 49.15 \text{ mm}$ 	$Sc = 1 \text{ mm}/102 \text{ mm}$ $d_{4,2}^{foto} = 9.0 \text{ mm}$ $d_{4,5}^{foto} = 10.1 \text{ mm}$ <hr/> $d_{4,2}^{(2)} = 0.089 \text{ mm}$ $d_{4,5} = 0.099 \text{ mm}$ <hr/>
$\overline{d_{4,2}} = (d_{4,2} + d_{4,2}^{(2)}) / 2 = 0.101 \text{ mm}$		$\delta_{4,2} = 0.012 \text{ mm}$	
$\overline{d_{4,1}} = d_{4,1} - \delta_{4,1} = 0.114 - 0.009 = 0.105 \text{ mm}$		$\delta_{4,1} = \delta_{4,2} / \sqrt{2} = 0.012 / \sqrt{2} = 0.009 \text{ mm}$	
$\overline{d_{4,3}} = d_{4,3} - \delta_{4,3} = 0.094 - 0.009 = 0.085 \text{ mm}$		$\delta_{4,3} = \delta_{4,2} / \sqrt{2} = 0.012 / \sqrt{2} = 0.009 \text{ mm}$	

Таблица 7: Вершина 5. Параметры геометрии наконечника “белой” кнопки

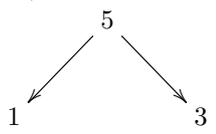
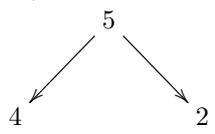
$r_{1,5} = 34.33 \text{ mm};$ $r_{3,5} = 35.49 \text{ mm}$ 	$Sc = 1 \text{ mm}/111 \text{ mm}$ $d_{5,0}^{foto} = 5.5 \text{ mm}$ $d_{5,1}^{foto} = 5.8 \text{ mm}$ $d_{5,3}^{foto} = 5.1 \text{ mm}$ <hr/> $d_{5,0} = 0.05 \text{ mm}$ $d_{5,1} = 0.053 \text{ mm}$ $d_{5,3} = 0.046 \text{ mm}$	$r_{4,5} = 33.30 \text{ mm};$ $r_{2,5} = 34.39 \text{ mm}$ 	$Sc = 2 \text{ mm}/217 \text{ mm}$ $d_{5,0}^{foto} = 7.12 \text{ mm}$ $d_{5,4}^{foto} = 5.7 \text{ mm}$ $d_{5,2}^{foto} = 7.9 \text{ mm}$ <hr/> $d_{5,0}^{(2)} = 0.066 \text{ mm}$ $d_{5,4} = 0.053 \text{ mm}$ $d_{5,2} = 0.073 \text{ mm}$
$\overline{d_{5,0}} = (d_{5,0} + d_{5,0}^{(2)}) / 2 = 0.058 \text{ mm}$		$\delta_{5,0} = -0.008 \text{ mm}$	
$\overline{d_{5,1}} = d_{5,1} - \delta_{5,1} = 0.053 + 0.006 = 0.059 \text{ mm}$		$\delta_{5,1} = \delta_{5,0} / \sqrt{2} = -0.008 / \sqrt{2} = -0.006 \text{ mm}$	
$\overline{d_{5,3}} = d_{5,3} - \delta_{5,3} = 0.046 + 0.006 = 0.052 \text{ mm}$		$\delta_{5,3} = \delta_{5,0} / \sqrt{2} = -0.008 / \sqrt{2} = -0.006 \text{ mm}$	

Таблица 8: Сводная таблица измерений.

$r_{1,2}$	$r_{2,3}$	$r_{3,4}$	$r_{1,4}$	$r_{1,3}$	$r_{2,4}$	$r_{1,5}$	$r_{3,5}$	$r_{2,5}$	$r_{4,5}$
34.57	35.92	34.38	36.79	50.91	49.15	34.33	35.49	34.39	33.30
$d_{1,2}$	$d_{2,3}$	$d_{3,4}$	$d_{1,4}$	$d_{1,3}$	$d_{2,4}$	$d_{1,5}$	$d_{3,5}$	$d_{2,5}$	$d_{4,5}$
0.068	0.074	0.062	0.063	0.064	0.07	0.044	0.064	0.059	0.099
$d_{2,1}$	$d_{3,2}$	$d_{4,3}$	$d_{4,1}$	$d_{3,1}$	$d_{4,2}$	$d_{5,1}$	$d_{5,3}$	$d_{5,2}$	$d_{5,4}$
0.074	0.059	0.085	0.105	0.052	0.101	0.059	0.052	0.067	0.047
$r_{1,2}$	$r_{2,3}$	$r_{3,4}$	$r_{1,4}$	$r_{1,3}$	$r_{2,4}$	$r_{1,5}$	$r_{3,5}$	$r_{2,5}$	$r_{4,5}$
34.428	35.787	34.233	36.622	50.794	48.979	34.227	35.374	34.264	33.154

### 3.5 Подстановка результатов измерений.

После подстановки результатов измерений  $r_{i,j}$  в программу, получается неожиданный для квадрата объёма результат:

$$F = -3.4 \cdot 10^6 \text{ mm}^8 \tag{3.1}$$

Полученная нами величина отрицательна. Однако, имея ввиду сказанное в разделе (2.5), это не должно нас удивлять.

### 3.6 Анализ ошибок и их вкладов в неточность результатов.

Выпишем значения коэффициентов ошибок из (2.14), после подстановки измеренных значений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial r_{1,2}} &= 1.00 \cdot 10^8, \quad \frac{\partial F}{\partial r_{1,3}} = -1.46 \cdot 10^8, \quad \frac{\partial F}{\partial r_{1,4}} = 1.05 \cdot 10^8, \quad \frac{\partial F}{\partial r_{1,5}} = -5.5 \cdot 10^6, \quad \frac{\partial F}{\partial r_{2,3}} = 1.08 \cdot 10^8, \\ \frac{\partial F}{\partial r_{2,4}} &= -1.48 \cdot 10^8, \quad \frac{\partial F}{\partial r_{2,5}} = 5.57 \cdot 10^6, \quad \frac{\partial F}{\partial r_{3,4}} = 1.02 \cdot 10^8, \quad \frac{\partial F}{\partial r_{3,5}} = -5.83 \cdot 10^6, \quad \frac{\partial F}{\partial r_{4,5}} = 5.28 \cdot 10^6 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Заметим, что четыре коэффициента, соответствующие расстояниям от вершин основания до вершины 5 примерно в 20 раз меньше остальных, а “диагональные” коэффициенты отрицательны. Отсюда ясна природа знака для полученного нами результата: диагонали основания оказались чуть длиннее положенного. Теперь совсем несложно получить диапазон ошибки нашего эксперимента. Мы не будем принимать во внимание четыре ошибки, соответствующие относительно малым коэффициентам, а учтём только 6 больших  $\delta$  из таблиц данных (3) - (6). В результате после сложения соответствующих значений ошибок  $\delta_{i,j} + \delta_{j,i}$  и умножения на коэффициенты:

$$\begin{aligned} &(\pm 1.00(\delta_{1,2} + \delta_{2,1}) \pm (-1.46)(\delta_{1,3} + \delta_{3,1}) \pm 1.05(\delta_{1,4} + \delta_{4,1}) \pm 1.08(\delta_{2,3} + \delta_{3,2}) \\ &\pm (-1.48)(\delta_{2,4} + \delta_{4,2}) \pm 1.02(\delta_{3,4} + \delta_{4,3})) \cdot 10^8 = \pm \mathbf{16.5 \cdot 10^6 \text{ mm}^8} \end{aligned} \quad (3.3)$$

При подстановке результатов знак в  $\pm$  выбирался так, чтобы все члены суммы были одного знака. В этом случае результат максимален. А сами ошибки просто складывались вместо того, чтобы взять среднеквадратичную величину.

## 4 Выводы.

К сожалению открытие не состоялось. Во всяком случае пока. Результат расчёта с данными эксперимента (3.1) лежит глубоко внутри диапазона ошибок (3.3).

Однако, результат расчёта крайне чувствителен к малейшему отклонению в измерениях благодаря множителю  $10^8$ . К сожалению объём работы не позволяет провести интересное обсуждение вариантов выбора знаков ошибок: если взять все отклонения с одним знаком, то результат (3.1) окажется далеко за пределами суммы ошибок. Однако, даже без этого приёма, вычисление среднеквадратичного отклонения по каждой паре ошибок уменьшит диапазон (3.3), но всё равно (3.1) окажется внутри него.

Для большей уверенности необходимо улучшить качество обработки поверхностей, улучшить геометрию измеряемого предмета в целом и использовать более мощное оптическое и более точное измерительное оборудование. Например — микроскопы или фотоаппараты с большим увеличением и разрешением и микрометры. Улучшение точности измерений и качества обработки в 10 раз вполне доступно и может позволить сделать более определённые утверждения.

Кроме того, можно улучшить геометрию измеряемого тела. Нетрудно заметить, что малое влияние ошибки при измерении расстояний от вершины до основания пирамиды связаны именно с выбранной формой пирамиды: вычисление соответствующих четырёх коэффициентов в (2.5) для пирамиды с плоским основанием дают нули. И можно поискать форму пятиточечника, для которого функция (2.5) будет при заданной конфигурации и размерах иметь минимум.

## 5 Приложение. Фотоматериалы по геометрии вершин.

### 5.1 Плоскость 1 – 2 – 3 – 4 - вершина 5 (“белая” кнопка) вниз.

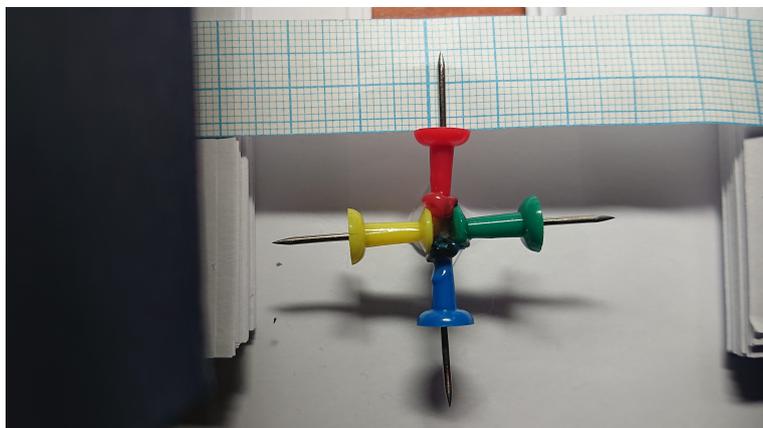


Рис. 7: Общий вид плоскости 1 – 2 – 3 – 4 при взгляде на основание “снизу”.

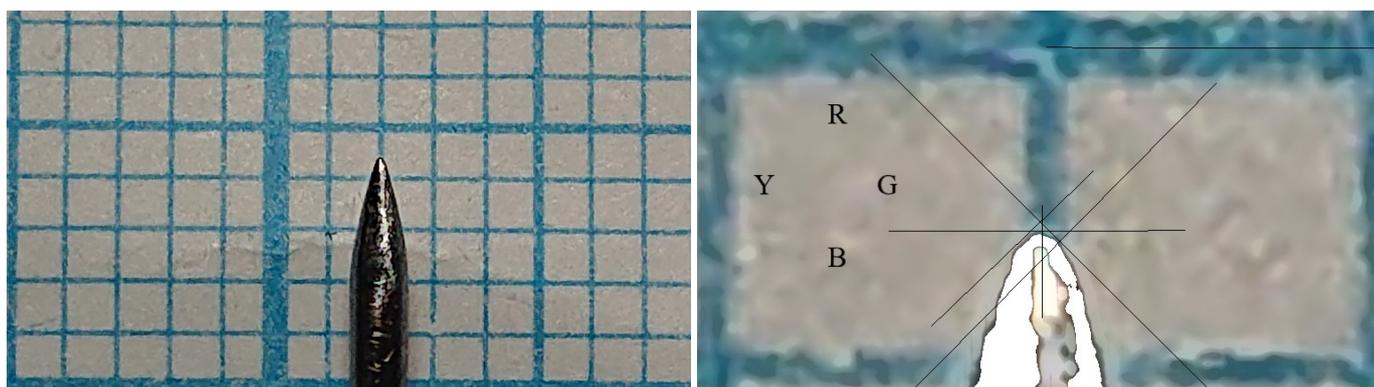


Рис. 8: слева — исходная фотография вершины 1 (“красная” кнопка), справа — после обработки.

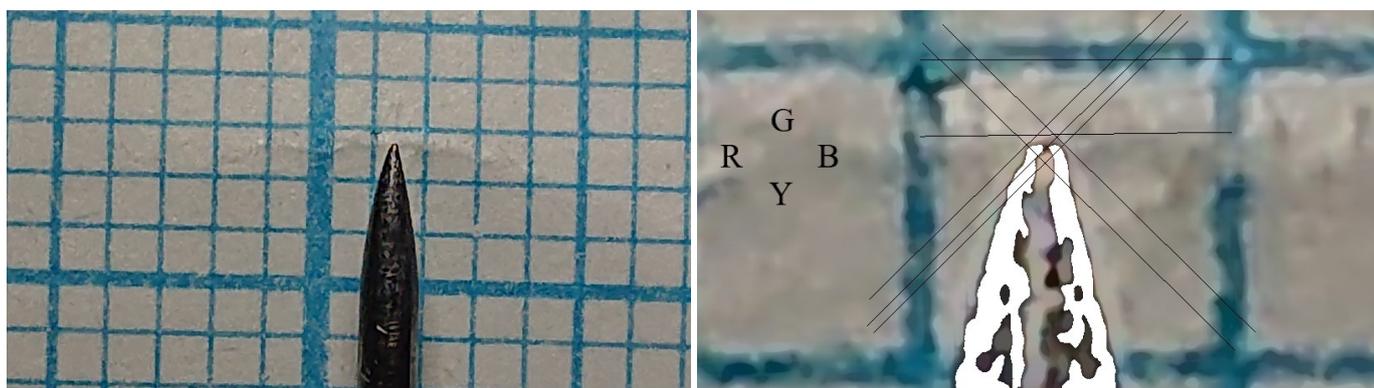


Рис. 9: слева — исходная фотография вершины 2 (“зелёная” кнопка), справа — после обработки.

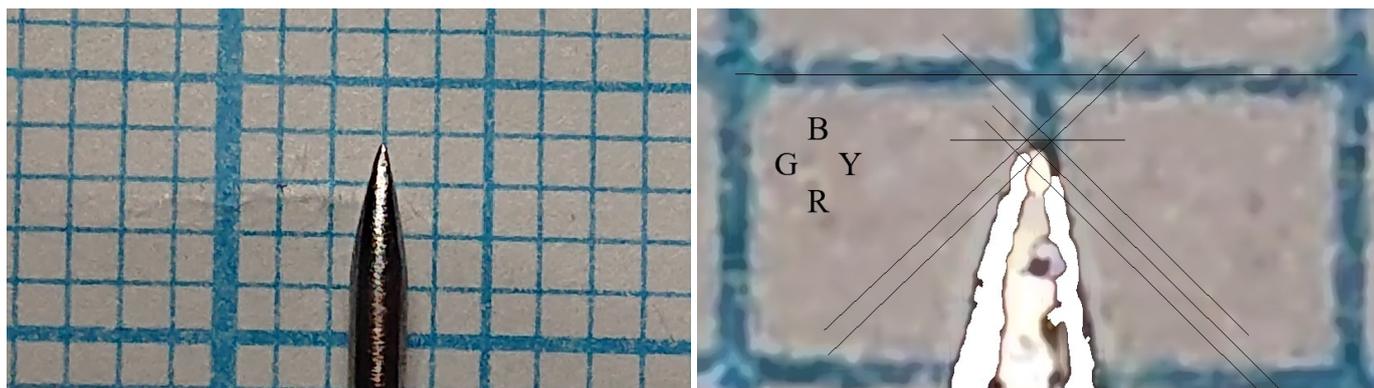


Рис. 10: слева — исходная фотография вершины 3 (“синяя” кнопка), справа — после обработки.

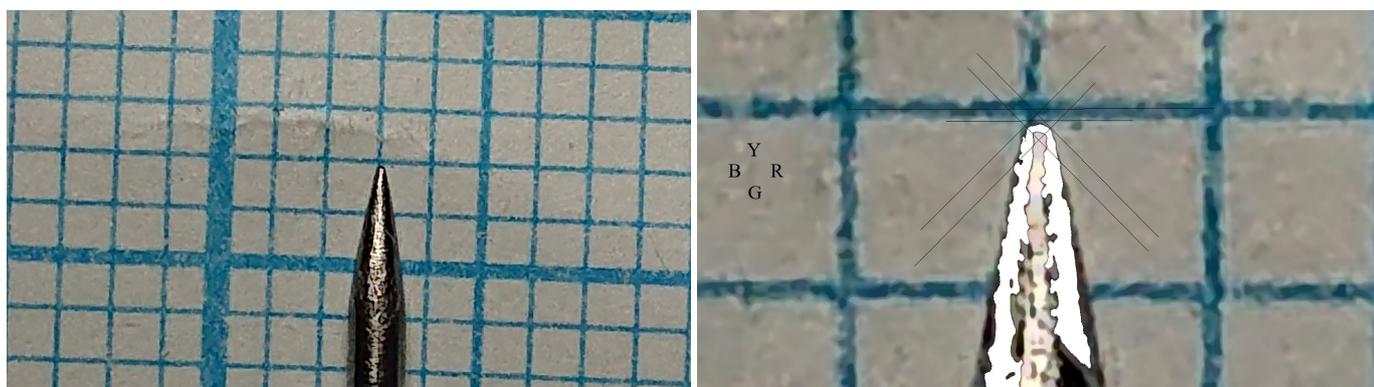


Рис. 11: слева — исходная фотография вершины 4 (“жёлтая” кнопка), справа — после обработки.

## 5.2 Плоскость 1 – 5 – 3 вершина 2 (“зелёная” кнопка) направлена вверх.

Пояснение

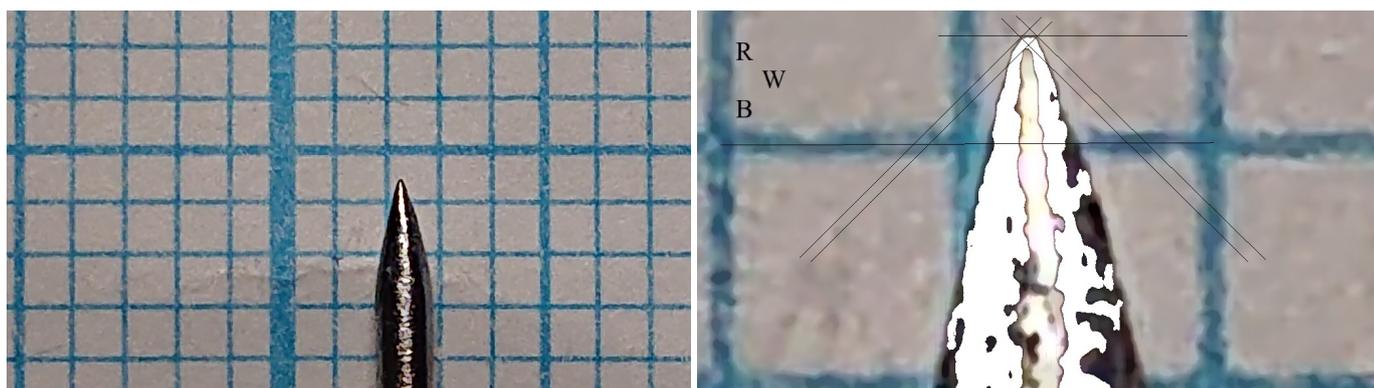


Рис. 12: слева — исходная фотография вершины 1 (“красная” кнопка), справа — после обработки.

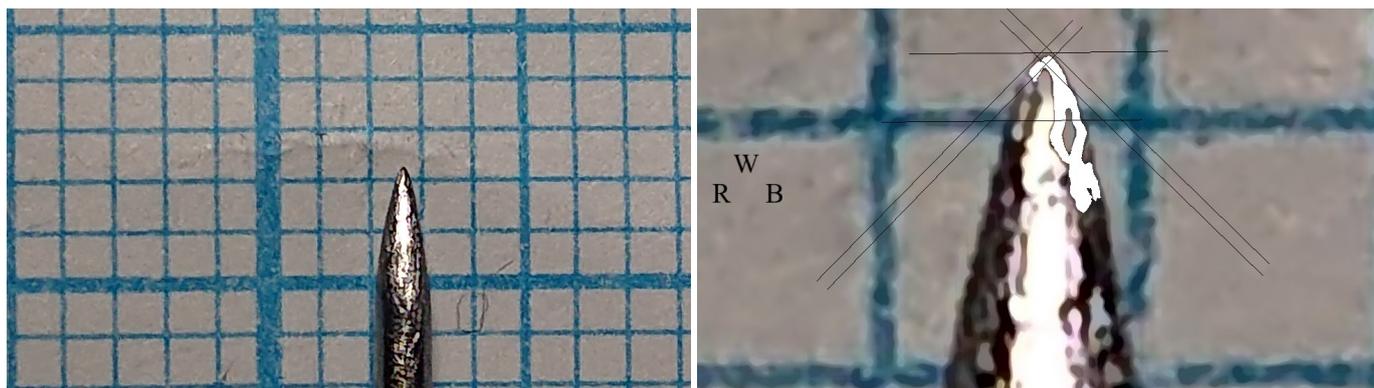


Рис. 13: слева — исходная фотография вершины 5 (“белая” кнопка), справа — после обработки.

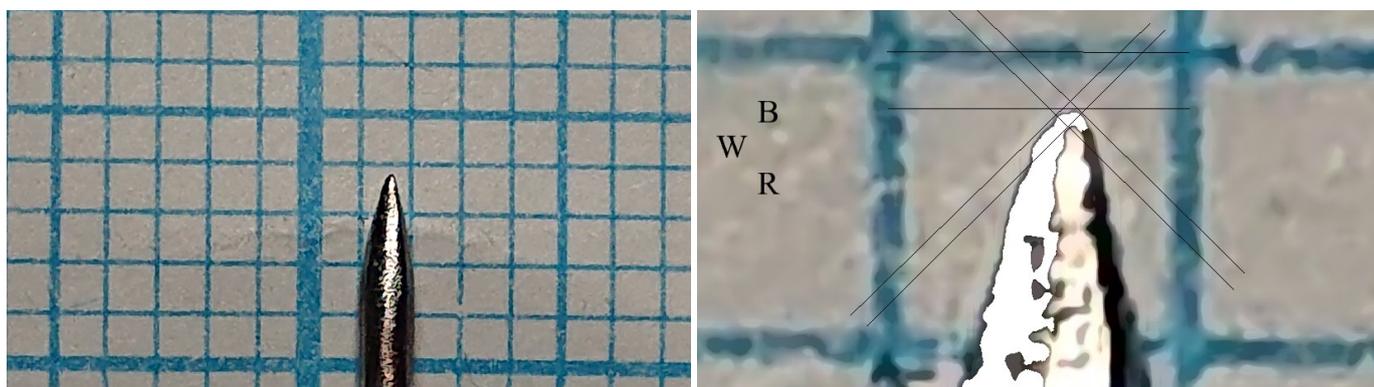


Рис. 14: слева — исходная фотография вершины 3 (“синяя” кнопка), справа — после обработки.

**5.3 Плоскость 2 – 5 – 4 вершина 1 (“красная” кнопка) направлена вверх.**

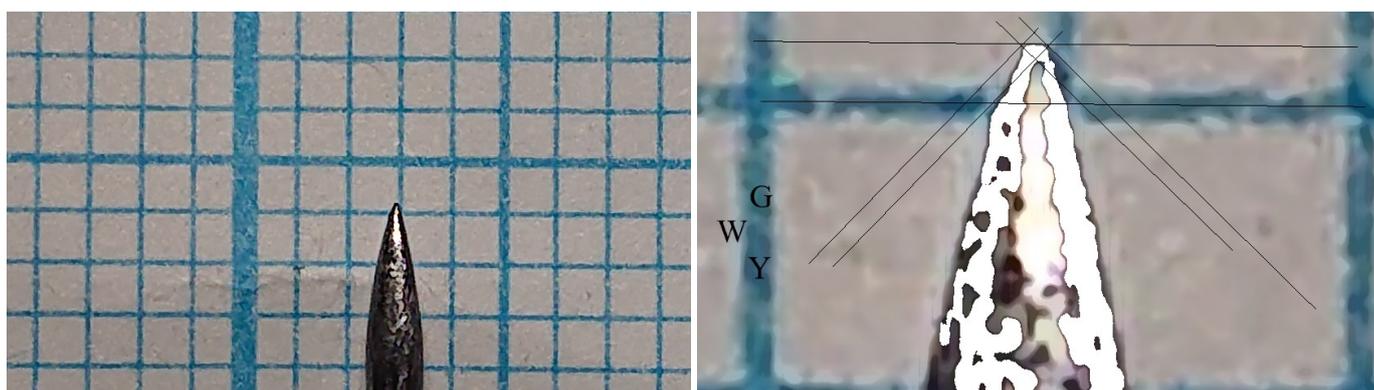


Рис. 15: слева — исходная фотография вершины 2 (“зелёная” кнопка), справа — после обработки.

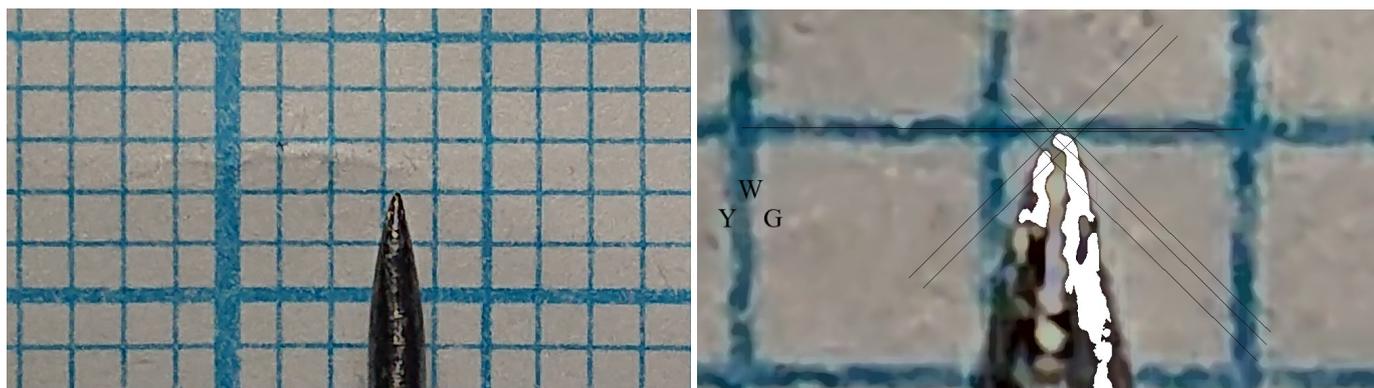


Рис. 16: слева — исходная фотография вершины 5 (“белая” кнопка), справа — после обработки.

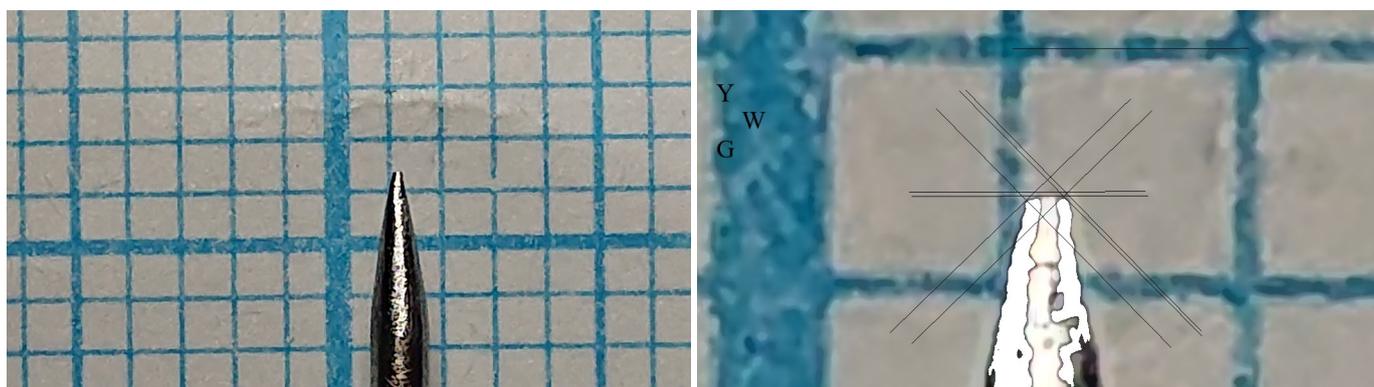


Рис. 17: слева — исходная фотография вершины 4 (“жёлтая” кнопка), справа — после обработки.

## Список литературы

- [1] Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. Учеб. для вузов. - 12-е изд. испр. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.